



(10) **DE 10 2015 005 231 B4** 2018.06.21

(12)

Patentschrift

(21) Aktenzeichen: **10 2015 005 231.4**
(22) Anmeldetag: **24.04.2015**
(43) Offenlegungstag: **27.10.2016**
(45) Veröffentlichungstag
der Patenterteilung: **21.06.2018**

(51) Int Cl.: **G01B 21/22 (2006.01)**
B23Q 16/02 (2006.01)
B23F 23/12 (2006.01)

Innerhalb von neun Monaten nach Veröffentlichung der Patenterteilung kann nach § 59 Patentgesetz gegen das Patent Einspruch erhoben werden. Der Einspruch ist schriftlich zu erklären und zu begründen. Innerhalb der Einspruchsfrist ist eine Einspruchsgebühr in Höhe von 200 Euro zu entrichten (§ 6 Patentkostengesetz in Verbindung mit der Anlage zu § 2 Abs. 1 Patentkostengesetz).

(73) Patentinhaber:

**Bundesrepublik Deutschland, vertr. durch das
Bundesministerium für Wirtschaft und Energie,
dieses vertreten durch den Präsidenten der
Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, 38116
Braunschweig, DE**

(72) Erfinder:

**Le, Tuan Anh, Dr., 61169 Friedberg, DE;
Härtig, Frank, Dr., 38116 Braunschweig,
DE; Neuschaefer-Rube, Ulrich, Dr., 38116
Braunschweig, DE; Kniel, Karin, Dr., 38100
Braunschweig, DE**

(74) Vertreter:

**Gramm, Lins & Partner Patent- und
Rechtsanwälte PartGmbB, 38122 Braunschweig,
DE**

(56) Ermittelter Stand der Technik:
siehe Folgeseiten

(54) Bezeichnung: **Verfahren und Vorrichtung zum Messen der Kreisteilungsfehler von Flanken eines Werkstücks**

(57) Hauptanspruch: Verfahren zum Messen der Kreisteilungsfehler von Flanken (12) eines Werkstücks (14) einer Kreisteilung mit Teilungszahl N, mit den Schritten:

(a) Anordnen des Werkstücks (14) auf einem Drehtisch (16), der in der Teilungszahl N in äquidistante Winkelpositionen teilbar ist,

(b) Messen in vorgegebenen Drehtischwinkelpositionen des Drehtisches (16), wobei die Teilungsabweichung die Differenz zwischen der gemessenen Ist-Position der Flanke (12) und der bei idealer Kreisteilung zu erwartenden Soll-Position ist, und

(c) Berechnen der Kreisteilungsfehler aus den Teilungsabweichungen und den Drehtischwinkelpositionen,

(d) wobei die Teilungsabweichungen zumindest an den Drehtischwinkelpositionen $\{0, R, \lambda \cdot S$ für alle λ mit $1 \leq \lambda \leq R-1$ gemessen werden, mit

- $1 < R < S$,

- $N = R \cdot S$ und wobei

- R und S teilerfremd sind, und

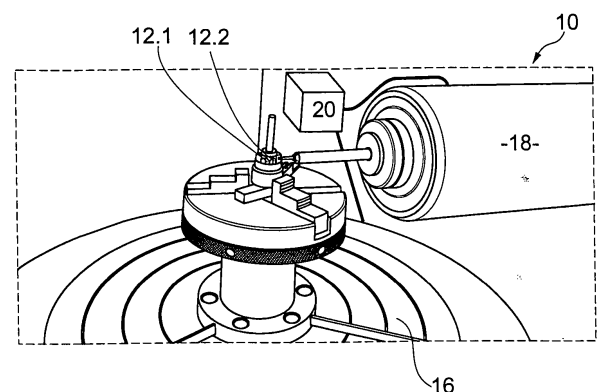
(e) die Koordinaten an weniger als N und zumindest (R+1) Drehtischwinkelpositionen gemessen werden dadurch gekennzeichnet, dass

(f) das Berechnen der Kreisteilungsfehler aus den Teilungsabweichungen Schritte umfasst, die

- einem Ergänzen einer Matrix der Messergebnisse um weitere Matrixelemente, sodass eine ergänzte Matrix erhalten wird,

- einem Anwenden des Primfaktorzerlegungsverfahrens auf die ergänzte Matrix und

- einem Herausrechnen des Einflusses der Ergänzungen aus dem Ergebnis, das beim Anwenden des Primfaktorzerlegungsverfahrens erhalten wurde, entsprechen.



(56) Ermittelter Stand der Technik:

DE	10 2006 059 491	B3
DE	40 09 593	A1

R. Probst: Self-calibration of divided circles on the basis of a prime factor algorithm. In: Meas. Sci. Technol., (2008), 015101. <http://dx.doi.org/10.1088/0957-0233/19/1/015101> [abgerufen am 21.12.2015]

Beschreibung

[0001] Die Erfindung betrifft ein Verfahren zum Messen der Kreisteilungsfehler von Flanken eines Werkstücks. Gemäß einem zweiten Aspekt betrifft die Erfindung eine Vorrichtung zum Messen der Kreisteilungsfehler von Flanken eines Werkstücks gemäß dem Oberbegriff des unabhängigen Sachanspruchs.

[0002] Der Kreisteilungsfehler ist ein wichtiges Qualitätskriterium beispielsweise für Zahnräder und muss daher mit möglichst hoher Genauigkeit bestimmt werden. Aus der DE 10 2006 059 491 B3 ist ein Verfahren bekannt, mittels dem für eine Vielzahl von Kreisteilungszahlen N der Kreisteilungsfehler mit einer sehr hohen Genauigkeit bestimmt werden kann. Nachteilig an diesem Verfahren ist, dass für große Kreisteilungszahlen N eine beträchtliche Anzahl an Messwerten aufgenommen werden muss. Es ist ein weiterer Nachteil, dass das Verfahren nicht für Kreisteilungszahlen N anwendbar ist, die Primzahlpotenzen sind.

[0003] Aus der DE 10 2006 059 491 B3 und dem Artikel „Self-calibration of divided circles on the basis of a prime factor algorithm“ von R. Probst, Meas. Sci. Technol. (2008), 015101 ist ein Verfahren zur Berechnung des Kreisteilungsfehlers bekannt, das auf der Zerlegung des Teilkreises in zwei Unterteilkreise beruht. Für jedes Teilungsintervall werden die Differenzen der Teilungsabweichungen bestimmt und danach fouriertransformiert. Nachteilig an diesem Verfahren ist der hohe Aufwand bei großen Kreisteilungszahlen N .

[0004] Aus der DE 40 09 593 A1 ist eine Winkelmessvorrichtung bekannt, die mehrere Abtasteinheiten aufweist, sodass mehrere Winkel simultan messbar sind. Eine solche Winkelmessvorrichtung ist vorteilhaft, wenn Zahnräder mit stets der gleichen Kreisteilungszahl N vermessen werden sollen. Nachteilig ist der hohe Apparative Aufwand.

[0005] Der Erfindung liegt die Aufgabe zugrunde, die Messung des Kreisteilungsfehlers zu verbessern.

[0006] Die Erfindung löst das Problem durch ein Verfahren mit den Merkmalen von Anspruch 1. Gemäß einem zweiten Aspekt löst die Erfindung das Problem durch eine Vorrichtung gemäß dem unabhängigen Sachanspruch.

[0007] Vorteilhaft an der Erfindung ist, dass eine deutlich geringere Anzahl an Drehtischwinkelpositionen verwendet werden muss. Das reduziert die Messzeit, insbesondere bei großen Kreisteilungszahlen N , signifikant.

[0008] Es ist ein weiterer Vorteil, dass das Verfahren auch anwendbar ist, wenn die Kreisteilungszahl N eine Primzahlpotenz ist.

[0009] Vorteilhaft ist zudem, dass Günstig ist zudem, dass der Kreisteilungsfehler bei großen N bestimmt werden kann, ohne dass die bislang notwendige Anzahl an Drehtischwinkelpositionen angefahren werden muss.

[0010] Umfasst das Berechnen des Kreisteilungsfehlers aus den Teilungsabweichungen Schritte, die einem Ergänzen einer Matrix der Messergebnisse um weitere Matrixelemente, sodass eine ergänzte Matrix erhalten wird, einem Anwenden des Primfaktorzerlegungsverfahrens auf die ergänzte Matrix und einem Herausrechnen des Einflusses des Ergänzens aus dem Ergebnis, dass beim Anwenden des Primfaktorzerlegungsverfahrens erhalten wurde, entsprechen, kann der Kreisteilungsfehler auf Basis von vergleichsweise wenigen Messpunkten berechnet werden. Hierunter ist zu verstehen, dass es zwar günstig es, wenn die genannten Schritte an den entsprechenden mathematischen Objekten durchgeführt werden, es ist aber ausreichend, dass Schritte durchgeführt werden, die sich durch die genannte Manipulation des mathematischen Objekts beschreiben lassen. Es ist in anderen Worten möglich, nicht aber notwendig, dass beispielsweise die Matrix der Messergebnisse tatsächlich als Matrix erfasst und gespeichert wird. Es ist auch möglich, dass die Messergebnisse beispielsweise als Zeichenfolge vorgehalten werden und so bearbeitet werden, dass diese Manipulation durch die genannten Schritte beschrieben werden kann.

[0011] Es sei darauf hingewiesen, dass es jeweils möglich ist, nicht aber notwendig ist, dass in den Ansprüchen genannte mathematische Operationen an den jeweiligen mathematischen Objekten vorgenommen werden. Wichtig ist lediglich, dass auf die gemessenen Teilungsfehler ein Verfahren angewandt wird, das das gleiche Ergebnis liefert wie das jeweils beschriebene Verfahren.

[0012] Es sei zudem darauf hingewiesen, dass unter dem gleichen Ergebnis solche Ergebnisse zu verstehen sind, die nicht im mathematischen Sinne gleich sind, sondern das vielmehr deren Abweichungen zu dem Er-

gebnis, das anhand eines erfindungsgemäßen Verfahrens erhalten würde, so klein sind, dass sie tolerabel sind. Insbesondere sind auch solche Ergebnisse als gleich anzusehen, bei denen eine relative Abweichung zu den Ergebnissen, die mittels eines Verfahrens gemäß Anspruch 4 erzielt werden, um höchstens 2%, insbesondere um höchstens 1 %, abweichen.

[0013] Im Folgenden wird das in den Ansprüchen dargelegte Verfahren hergeleitet. Zum besseren Verständnis wird zunächst auf bereits bekannte Verfahren eingegangen. Das erfindungsgemäße Verfahren wird im Folgenden auch als Prime-Factor-Division-Supplement-Verfahren bezeichnet.

Einleitung

[0014] Die zur Bestimmung der Teilungsabweichungen von Kreisverkörperungen, wie optischen Polygonen, Winkel-Indextischen, Zahnräder oder Winkelencodern eingesetzten Kalibrierverfahren beruhen oft auf dem Kreisschlussprinzip: Die Summe der Teilungsabweichungen in n äquidistant über 2π verteilten Winkelpositionen (die sogenannten Rosetten) ergeben definitionsgemäß Null. Dies gilt für alle harmonischen Komponenten der Teilungsabweichungen mit Ausnahme der in n periodischen Komponente und ihrer Vielfachen.

[0015] Die praktische Bestimmung von Kreisteilungsabweichungen erfolgt oftmals mit Hilfe des sogenannten Rosettenverfahrens (englisch: Cross Calibration (CC)). Bei dieser Methode werden die Teilungsabweichungen des Prüflings gegen zwei weitere Kreisteilungen gemessen, die sukzessive in n äquidistanten Winkelpositionen zum Prüfling orientiert sind. Sollen bei diesem Verfahren auch die höheren Harmonischen der Teilungsabweichungen des Prüflings mit erfasst werden, wird eine hohe Anzahl von Relativlagen der Kreisteilungen zueinander benötigt. Die Messzeit für eine vollständige Rosettenkalibrierung ist dementsprechend hoch und selbst bei automatischer Einstellung der Relativlagen selten akzeptabel. Auf der anderen Seite ermöglicht das Rosettenverfahren die Erzielung sehr geringer Messunsicherheiten durch die hochgenaue Bestimmung der systematischen Teilungsabweichungen.

Rosettenverfahren

[0016] Bei der Aufnahme von Messdaten auf einem universellen Koordinatenmessgerät (KMG) geht das Dreirosettenmodell davon aus, dass sich die ermittelten Teilungsfehler aus drei unabhängigen Rosetten zusammensetzen, die in **Fig. 1** gezeigt sind:

- Rosette A: Teilungsfehler vom Prüfling;
- Rosette B: Teilungsfehler vom Drehtisch;
- Rosette C: Teilungsfehler vom KMG.

[0017] Durch schematisches Verdrehen der Rosetten gegeneinander und Mehrfachmessung des Prüfkörpers in den verschiedenen Relativlagen lassen sich die einzelnen Abweichungen vollständig voneinander trennen. In **Fig. 1** ist ein prinzipieller Messaufbau unter Einsatz eines Drehtisches dargestellt. Der Prüfling mit der Teilung A ist mit der darunter angeordneten Drehvorrichtung mit der Teilung B verbunden. Die Teilung C wird hier durch das sich auf einer Kreisteilung bewegende Koordinatenmessgerät repräsentiert. Jeder Messdurchlauf erfolgt bei stehendem Rad, d. h. ohne Einsatz eines Drehtisches. Zur Aufnahme der Messpunkte wird der Taststift zur Antastung aller n Teilungen um den Prüfling herumgefahren. Demnach bewegt sich der Taster des Koordinatenmessgerätes um den Prüfkörper von Teilung zu Teilung. Für jeden weiteren Messdurchlauf wird das Rad um den Betrag einer Prüfteilung mit Hilfe der Drehvorrichtung oder manuell nach Augenmaß oder Anschlag in mathematisch positiver Drehrichtung weiter positioniert. Jeder Messdurchlauf beginnt durch entsprechende Positionierung des Koordinatenmessgerätes wieder bei der ersten Teilung. Nach Durchführung der n Messdurchläufe stehen letztendlich n^2 Messwerte für die Auswertung zur Verfügung.

[0018] Zweckmäßigerweise werden die Teilungsabweichungen nach dem Rosettenverfahren für die Mess- und Auswertestrategie in Matrixschreibweise erfasst:

$$\begin{pmatrix} A_0 + B_0 + C_0 & A_0 + B_1 + C_{n-1} & \dots & A_0 + B_{n-1} + C_1 \\ A_1 + B_0 + C_1 & A_1 + B_1 + C_0 & \dots & A_1 + B_{n-1} + C_2 \\ A_2 + B_0 + C_2 & A_2 + B_1 + C_1 & \dots & A_2 + B_{n-1} + C_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n-2} + B_0 + C_{n-2} & A_{n-2} + B_1 + C_{n-3} & \dots & A_{n-2} + B_{n-1} + C_{n-1} \\ A_{n-1} + B_0 + C_{n-1} & A_{n-1} + B_1 + C_{n-2} & \dots & A_{n-1} + B_{n-1} + C_0 \end{pmatrix}.$$

[0019] In der obigen $(n \times n)$ -Matrix M' werden die Teilungssummenabweichungen jedes einzelnen Messdurchlaufes in die Spalte i eingetragen, während jede Zeile j der Matrix die Summenteilungsabweichung einer Teilung des Prüflings aus unterschiedlichen Messdurchläufen und in unterschiedlichen Messpositionen wieder-

gibt. Folglich bestehen die ermittelten Summenteilungsabweichungen $M'_{i,j}$ aus den Fehlern an dem Prüfling, den Fehlern beim Weiterdrehen, und den Fehlern vom Koordinatenmessgerät. Um das Kreisschlussprinzip zu erfüllen, muss eine Konstante

$$K_{CC} := \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} M'_{i,j}$$

zusätzlich eingeführt werden. Anschließend wird von jedem Eintrag $M'_{i,j}$ der Matrix M' die Konstante K_{CC} subtrahiert, so dass sich eine neue Matrix $M = (M_{i,j})$ mit

$$M_{i,j} := M'_{i,j} - K_{CC}$$

ergibt. Mittels der Kreisschlussbedingung

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = \sum_{k=0}^{n-1} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} C_k = 0$$

lassen sich die einzelnen Abweichungen durch Mittelwertbildung voneinander trennen:

- Summe über die Zeile i der Matrix M

$$A_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} M_{i,j};$$

- Summe über die Spalte j der Matrix M

$$B_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_{i,j};$$

- Summe über die Diagonalen der Matrix M

$$C_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} M_{j+i \bmod n, j}.$$

[0020] Im Fall $n = 6$ und der dazugehörigen Rosettenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & M_{0,3} & M_{0,4} & M_{0,5} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & M_{1,4} & M_{1,5} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & M_{2,4} & M_{2,5} \\ M_{3,0} & M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} & M_{3,5} \\ M_{4,0} & M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & M_{4,4} & M_{4,5} \\ M_{5,0} & M_{5,1} & M_{5,2} & M_{5,3} & M_{5,4} & M_{5,5} \end{pmatrix}$$

(1)

gilt es, z. B. bei der C_3 -Bestimmung die folgenden Einträge zu markieren:

$$\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & \boxed{M_{0,3}} & M_{0,4} & M_{0,5} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & \boxed{M_{1,4}} & M_{1,5} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & M_{2,4} & \boxed{M_{2,5}} \\ \boxed{M_{3,0}} & M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} & M_{3,5} \\ M_{4,0} & \boxed{M_{4,1}} & M_{4,2} & M_{4,3} & M_{4,4} & M_{4,5} \\ M_{5,0} & M_{5,1} & \boxed{M_{5,2}} & M_{5,3} & M_{5,4} & M_{5,5} \end{pmatrix}.$$

[0021] D. h., es ist

$$C_3 = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^n M_{j+2 \bmod 6, j} = \frac{1}{6} \cdot (M_{3,0} + M_{4,1} + M_{5,2} + M_{0,3} + M_{1,4} + M_{2,5}).$$

[0022] Dabei kann die mod-Notation als periodische Wiederholungseigenschaft verstanden werden, indem die Matrix M zweimal untereinander geschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} M \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & M_{0,3} & M_{0,4} & M_{0,5} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & M_{1,4} & M_{1,5} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & M_{2,4} & M_{2,5} \\ \boxed{M_{3,0}} & M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} & M_{3,5} \\ M_{4,0} & \boxed{M_{4,1}} & M_{4,2} & M_{4,3} & M_{4,4} & M_{4,5} \\ M_{5,0} & M_{5,1} & \boxed{M_{5,2}} & M_{5,3} & M_{5,4} & M_{5,5} \\ M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & \boxed{M_{0,3}} & M_{0,4} & M_{0,5} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & \boxed{M_{1,4}} & M_{1,5} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & M_{2,4} & \boxed{M_{2,5}} \\ M_{3,0} & M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} & M_{3,5} \\ M_{4,0} & M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & M_{4,4} & M_{4,5} \\ M_{5,0} & M_{5,1} & M_{5,2} & M_{5,3} & M_{5,4} & M_{5,5} \end{pmatrix}.$$

(2)

[0023] In der Regel kann auf die Notation mod verzichtet werden, wenn aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, dass ein Sachverhalt modulo zu interpretieren ist.

PFD-Verfahren

[0024] In der DE102006059491B3 wurde ein effizientes Verfahren für die Selbstkalibrierung von Kreisteilungen beschrieben, welches auf einen Primfaktoralgorithmus (PFA) zur schnellen Berechnung von Diskreten Fourier Transformationen (DFT) beruht. Dieses Verfahren mittels sogenannter Prime Factor Division (PFD) erfordert, dass sich die Anzahl der Teilungen N als Produkt zweier teilerfremder Zahlen R und S mit $1 < R < S$ faktorisieren lässt. Für solch ein zusammengesetztes N ist die Anwendung eines „divide et impera“-Prinzips möglich: Statt eine DFT der Dimension N werden zwei DFT kleinerer Dimension R und S betrachtet. Damit lässt sich die Anzahl der erforderlichen Rechenschritte von N^2 auf $R^2 + S^2$ reduzieren. Im Gegensatz zu den N^2 Messungen aus dem Rosettenverfahren sind dann lediglich $N(R + 1)$ Messungen notwendig, um die absoluten N Teilungsfehler zu bestimmen. Die verringerte Anzahl an Messpunkten ist allerdings mit einer erhöhten Standardmessunsicherheit verbunden.

[0025] Im Folgenden wird das PFD-Verfahren von einem anderen Blickwinkel näher beleuchtet. Anstatt die mathematischen Hintergründe und die PFD an sich soll der Zusammenhang zum Rosettenverfahren im Vordergrund der Betrachtungen stehen. Auf der einen Seite wird daran deutlich, dass es sich beim (erweiterten) PFD-Verfahren um ein verkürztes Rosettenverfahren handelt. Auf der anderen Seite werden diese Ausführungen für das spätere Verständnis des neuen Fehlertrennverfahrens von großem Nutzen sein. Die Prinzipien sollen zunächst mit Hilfe des Beispiels für

$$N = 6 = 2 \cdot 3 = R \cdot S$$

erläutert werden. Auch wird zu Illustrationszwecken angenommen, dass nur Teilungsfehler vom Prüfling vorhanden sind, während die anderen beiden Rosetten keine systematische Fehler aufweisen. Diese Annahme kann aufgrund eines später erbrachten Beweises wieder verworfen werden (vgl. Punkt 2.2.1).

[0026] Aus der Rosettenmatrix M' werden diejenigen Werte, die für das PFD-Verfahren von Bedeutung sind, bestimmt. Die restlichen Einträge von M' sind irrelevant und müssen nicht gemessen werden. Im ersten Durchlauf (erste Spalte in M') ist aufgrund von $R = 2$ der Referenzwert die Zeile 2, so dass $M'_{R,0} = M'_{2,0}$ markiert wird:

$$\begin{pmatrix} M'_{0,0} & M'_{0,1} & M'_{0,2} & M'_{0,3} & M'_{0,4} & M'_{0,5} \\ M'_{1,0} & M'_{1,1} & M'_{1,2} & M'_{1,3} & M'_{1,4} & M'_{1,5} \\ M'_{2,0} & M'_{2,1} & M'_{2,2} & M'_{2,3} & M'_{2,4} & M'_{2,5} \\ M'_{3,0} & M'_{3,1} & M'_{3,2} & M'_{3,3} & M'_{3,4} & M'_{3,5} \\ M'_{4,0} & M'_{4,1} & M'_{4,2} & M'_{4,3} & M'_{4,4} & M'_{4,5} \\ M'_{5,0} & M'_{5,1} & M'_{5,2} & M'_{5,3} & M'_{5,4} & M'_{5,5} \end{pmatrix}.$$

[0027] Anschließend werden die zum Referenzeintrag $M'_{2,0}$ gehörigen fett gedruckten Diagonaleinträge gekennzeichnet:

$$\begin{pmatrix} M'_{0,0} & M'_{0,1} & M'_{0,2} & M'_{0,3} & M'_{0,4} & M'_{0,5} \\ M'_{1,0} & M'_{1,1} & M'_{1,2} & M'_{1,3} & M'_{1,4} & M'_{1,5} \\ M'_{2,0} & M'_{2,1} & M'_{2,2} & M'_{2,3} & M'_{2,4} & M'_{2,5} \\ M'_{3,0} & M'_{3,1} & M'_{3,2} & M'_{3,3} & M'_{3,4} & M'_{3,5} \\ M'_{4,0} & M'_{4,1} & M'_{4,2} & M'_{4,3} & M'_{4,4} & M'_{4,5} \\ M'_{5,0} & M'_{5,1} & M'_{5,2} & M'_{5,3} & M'_{5,4} & M'_{5,5} \end{pmatrix}.$$

[0028] Das bedeutet also, dass alle Einträge

$$M'_{k+R,k} = M'_{k+2,k}$$

mit $0 \leq k \leq N - 1 = 6 - 1 = 5$ blau sind. Da nun

$$R - 1 = 2 - 1 = 1$$

und $S = 3$ ist, werden in der ersten Spalte alle Einträge, die ein Vielfaches von $S = 3$ und kleiner gleich

$$(R - 1)S = (2 - 1) \cdot 3 = 3$$

sind, in Fettdruck hervorgehoben:

$$\begin{pmatrix} \dot{M}_{0,0} & \dot{M}_{0,1} & \dot{M}_{0,2} & \dot{M}_{0,3} & \dot{M}_{0,4} & \dot{M}_{0,5} \\ \dot{M}_{1,0} & \dot{M}_{1,1} & \dot{M}_{1,2} & \dot{M}_{1,3} & \dot{M}_{1,4} & \dot{M}_{1,5} \\ \dot{M}_{2,0} & \dot{M}_{2,1} & \dot{M}_{2,2} & \dot{M}_{2,3} & \dot{M}_{2,4} & \dot{M}_{2,5} \\ \dot{M}_{3,0} & \dot{M}_{3,1} & \dot{M}_{3,2} & \dot{M}_{3,3} & \dot{M}_{3,4} & \dot{M}_{3,5} \\ \dot{M}_{4,0} & \dot{M}_{4,1} & \dot{M}_{4,2} & \dot{M}_{4,3} & \dot{M}_{4,4} & \dot{M}_{4,5} \\ \dot{M}_{5,0} & \dot{M}_{5,1} & \dot{M}_{5,2} & \dot{M}_{5,3} & \dot{M}_{5,4} & \dot{M}_{5,5} \end{pmatrix}.$$

[0029] Danach werden zu diesen Elementen die dazugehörigen Diagonalen

$$\dot{M}_{k+jS,k} = \dot{M}_{k+j3,k}$$

mit

$$0 \leq k \leq N - 1 = 6 - 1 = 5$$

und

$$0 \leq j \leq R - 1 = 2 - 1 = 1$$

gebildet:

$$\begin{pmatrix} \dot{M}_{0,0} & \dot{M}_{0,1} & \dot{M}_{0,2} & \dot{M}_{0,3} & \dot{M}_{0,4} & \dot{M}_{0,5} \\ \dot{M}_{1,0} & \dot{M}_{1,1} & \dot{M}_{1,2} & \dot{M}_{1,3} & \dot{M}_{1,4} & \dot{M}_{1,5} \\ \dot{M}_{2,0} & \dot{M}_{2,1} & \dot{M}_{2,2} & \dot{M}_{2,3} & \dot{M}_{2,4} & \dot{M}_{2,5} \\ \dot{M}_{3,0} & \dot{M}_{3,1} & \dot{M}_{3,2} & \dot{M}_{3,3} & \dot{M}_{3,4} & \dot{M}_{3,5} \\ \dot{M}_{4,0} & \dot{M}_{4,1} & \dot{M}_{4,2} & \dot{M}_{4,3} & \dot{M}_{4,4} & \dot{M}_{4,5} \\ \dot{M}_{5,0} & \dot{M}_{5,1} & \dot{M}_{5,2} & \dot{M}_{5,3} & \dot{M}_{5,4} & \dot{M}_{5,5} \end{pmatrix}.$$

[0030] Zum Schluss bleibt nur noch folgendes Zahlenschema übrig:

$$\begin{pmatrix} \dot{M}_{0,0} & & & \dot{M}_{0,3} & \dot{M}_{0,4} & \\ & \dot{M}_{1,1} & & & \dot{M}_{1,4} & \dot{M}_{1,5} \\ \dot{M}_{2,0} & & \dot{M}_{2,2} & & & \dot{M}_{2,5} \\ \dot{M}_{3,0} & \dot{M}_{3,1} & & \dot{M}_{3,3} & & \\ & \dot{M}_{4,1} & \dot{M}_{4,2} & & \dot{M}_{4,4} & \\ & & \dot{M}_{5,2} & \dot{M}_{5,3} & & \dot{M}_{5,5} \end{pmatrix}.$$

[0031] Nachdem die Konstante K_{PFDS} als arithmetisches Mittel über diese Werte berechnet wurde, kann

$M = (M_{i,j}) = (M_{i,j}^*) - K_{PFDS}$ abgeleitet werden:

$$\begin{pmatrix} M_{0,0} & & M_{0,3} & M_{0,4} & & \\ & M_{1,1} & & M_{1,4} & M_{1,5} & \\ M_{2,0} & & M_{2,2} & & & M_{2,5} \\ M_{3,0} & M_{3,1} & & M_{3,3} & & \\ & M_{4,1} & M_{4,2} & & M_{4,4} & \\ & & M_{5,2} & M_{5,3} & & M_{5,5} \end{pmatrix}.$$

[0032] Für die weitere Auswertung werden die Differenzen

$$d_k := M_{k+R,k} - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} M_{k+jS,k}$$

(3)

mit $0 \leq k \leq N - 1$ erzeugt, und zwar spaltenweise mit den blauen Werten als Referenz:

$$d_0 = M_{0+2,0} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2-1} M_{0+iS,0} = M_{2,0} - \frac{1}{2} (M_{0,0} + M_{3,0}),$$

$$d_1 = M_{1+2,1} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2-1} M_{1+iS,1} = M_{3,1} - \frac{1}{2} (M_{1,1} + M_{4,1}),$$

$$d_2 = M_{2+2,2} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2-1} M_{2+iS,2} = M_{4,2} - \frac{1}{2} (M_{2,2} + M_{5,2}),$$

$$d_3 = M_{3+2,3} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2-1} M_{3+iS,3} = M_{5,3} - \frac{1}{2} (M_{3,3} + M_{0,3}),$$

$$d_4 = M_{4+2,4} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2-1} M_{4+iS,4} = M_{0,4} - \frac{1}{2} (M_{4,4} + M_{1,4}),$$

$$d_5 = M_{5+2,5} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2-1} M_{5+iS,5} = M_{1,5} - \frac{1}{2} (M_{5,5} + M_{2,5}).$$

[0033] Im Anschluss sind die errechneten Differenzen d_k dem Prime Factor Division-Algorithmus zur Bestimmung der Teilungsabweichungen zu übergeben:

- Erste Indextransformation $d_k \leftrightarrow d_{(k_0,k_1)}$ (vgl. Tabelle 1):

$$k \equiv R \cdot R_S \cdot k_0 + S \cdot S_R \cdot k_1 \pmod{N}$$

mit

$$k \equiv k_0 \pmod{S} \text{ und } k \equiv k_1 \pmod{R}$$

sowie

$R \cdot R_S \equiv 1 \pmod S$ und $S \cdot S_R \equiv 1 \pmod R$.

(4)

- DFT von $d_{(k_0, k_1)}$ für $0 \leq k_1 \leq R - 1$:

$$D'_{(n_1, k_1)} := \sum_{k_0=0}^{S-1} d_{(k_0, k_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_1 k_0}{S}}, \quad 0 \leq n_1 \leq S - 1.$$

- DFT von $D'_{(n_1, k_1)}$ für $0 \leq n_1 \leq S - 1$:

$$D_{(n_0, n_1)} := \sum_{k_1=0}^{R-1} D'_{(n_1, k_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_0 k_1}{R}}, \quad 0 \leq n_0 \leq R - 1.$$

- Berechnung der Fourierharmonischen $F_{(n_0, n_1)}$:

$F_{(0,0)} := 0,$

$$F_{(0, n_1)} := \frac{D_{(0, n_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_1 R}{S}}}{1 - e^{-\frac{2\pi i n_1 R}{S}}} \quad \text{für } n_1 \neq 0,$$

$$F_{(n_0, n_1)} := D_{(n_0, n_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_1 R}{S}} \quad \text{für } n_0 \neq 0.$$

- Zweite Indexttransformation $F_{(n_0, n_1)} \leftrightarrow F_n$ (vgl. Tabelle 2):

$$n \equiv S \cdot n_0 + R \cdot n_1 \pmod N$$

mit

$$n \equiv n_0 \pmod R \quad \text{und} \quad n \equiv n_1 \pmod S.$$

- Bestimmung der Teilungsabweichungen f_k durch

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \cdot e^{-\frac{2\pi i n k}{N}}, \quad 0 \leq k \leq N - 1,$$

mit der Kreisschlussbedingung

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k = 0.$$

(5)

Tabelle 1: $k \leftrightarrow (k_0, k_1)$ am Beispiel $N = 6, R = 2$ und $S = 3$

	k_0	0	1	2
k_1	k			
0		0	4	2
1		3	1	5

Tabelle 2: $n \leftrightarrow (n_0, n_1)$ am Beispiel $N = 6$, $R = 2$ und $S = 3$

n_0	n_1 n	0	1	2
0		0	2	4
1		3	5	1

PFD Supplements

[0034] Mit dem Rosettenaufbau aus **Fig. 1** als Ausgangssituation wird das PFD-Verfahren anhand einer neuen Messstrategie zu einem Kalibrierverfahren für jede Teilungszahl N und zur algorithmischen Trennung der Fehler aus den drei Rosetten A, B und C ergänzt.

Supplement 1: Messstrategie

[0035] Um die Anzahl der Messpunkte, die für das Rosettenverfahren notwendig sind, zu reduzieren, kann im Allgemeinen entweder die Anzahl der Teilungsmessungen pro Drehtischposition oder die Anzahl der Drehtischpositionen an sich verringert werden. Die erste Möglichkeit wurde vom PFD-Verfahren in Anspruch genommen (vgl. Punkt 1.2). D. h., in jeder Drehtischposition werden lediglich bestimmte Teilungen des Prüfkörpers gemessen. Für die praktische Realisierung ist es jedoch sinnvoller, alle Teilungen vom Prüfling in bestimmten Drehtischpositionen zu messen. Als Gründe sind, u. a. einfachere Programmierbarkeit der Messsoftware und die Zeitersparnis beim Weiterdrehen zu nennen.

[0036] Die zu messenden Drehtischpositionen gehen aus der Primfaktorzerlegung R und S von der zusammengesetzten Teilungszahl N hervor. Gegenüber dem PFD- bzw. Rosettenverfahren, bei dem einige bzw. alle Zahnteilungen in allen Drehtischpositionen gemessen werden müssen, wird beim PFDS-Verfahren nur in den Positionen

$$0, R, S, 2S, 3S, \dots, (R-1)S$$

jede Zahnteilung erfasst. Ist N beispielsweise 14, so sind die $R + 1 = 2 + 1 = 3$ Drehtischpositionen mit den Nummern 0, 2 und 7 zu messen. Diese Auswahl der Drehtischpositionen stellt sicher, dass die für den PFD-Algorithmus benötigten Differenzen d_k gebildet werden können (vgl. Gleichung 3 und Punkt 2.2.3). Insgesamt werden dadurch $N(R+1)$ Messpunkte aufgenommen.

Supplement 2: Fehlertrennverfahren

Theoretisches zum PFD-Algorithmus

[0037] Zu Beginn wird gezeigt, dass der PFD-Algorithmus zur Bestimmung der Teilungsabweichungen f_k sich gegenüber gewissen Fehlern konsistent verhält.

[0038] Sind die Messwerte für beliebig festes $0 \leq k \leq N - 1$ durch

$$M_{k+R,k} = f_{k+R,k} + H_k = f_{k+R} + H_k,$$

$$M_{k,k} = f_{k,k} + H_k = f_k + H_k,$$

$$M_{k+S,k} = f_{k+S,k} + H_k = f_{k+S} + H_k,$$

$$M_{k+2S,k} = f_{k+2S,k} + H_k = f_{k+2S} + H_k,$$

$$\vdots$$

$$M_{k+(R-2)S,k} = f_{k+(R-2)S,k} + H_k = f_{k+(R-2)S} + H_k,$$

$$M_{k+(R-1)S,k} = f_{k+(R-1)S,k} + H_k = f_{k+(R-1)S} + H_k$$

gegeben, so folgt

$$\begin{aligned}
 d_k &= M_{k+R,k} - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} M_{k+jS,k} \\
 &= f_{k+R} + H_k - \left(\frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} (f_{k+jS} + H_k) \right) \\
 &= f_{k+R} - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} f_{k+jS}.
 \end{aligned}$$

(6)

[0039] D. h., mittels Differenzbildung lassen sich die konstanten Fehler H_k komplett beseitigen. Folglich haben sie keinen Einfluss bei der Diskreten Fourier Transformation der d_k .

[0040] Seien nun „semi-variable“ Fehler in den Messwerten vorhanden:

$$\begin{aligned}
 M_{k+R,k} &= f_{k+R,k} + E_R = f_{k+R} + E_R, \\
 M_{k,k} &= f_{k,k} + E_0 = f_k + E_0, \\
 M_{k+S,k} &= f_{k+S,k} + E_1 = f_{k+S} + E_1, \\
 M_{k+2S,k} &= f_{k+2S,k} + E_2 = f_{k+2S} + E_2, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{k+(R-2)S,k} &= f_{k+(R-2)S,k} + E_{R-2} = f_{k+(R-2)S} + E_{R-2}, \\
 M_{k+(R-1)S,k} &= f_{k+(R-1)S,k} + E_{R-1} = f_{k+(R-1)S} + E_{R-1}.
 \end{aligned}$$

[0041] Dann gilt mit den Abkürzungen

$$\bar{d}_k := f_{k+R} - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} f_{k+jS}$$

und

$$\bar{D}'_{(n_1, k_1)} := \sum_{k_0=0}^{S-1} \bar{d}_{(k_0, k_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_1 k_0}{S}},$$

dass

$$\begin{aligned}
 d_k &= M_{k+R} - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} M_{k+jS} = f_{k+R} + E_R - \left(\frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} (f_{k+jS} + E_j) \right) \\
 &= \bar{d}_k + E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j
 \end{aligned}$$

sowie

$$D'_{(n_1, k_1)} = \sum_{k_0=0}^{S-1} d_{(k_0, k_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_1 k_0}{S}} = \bar{D}'_{(n_1, k_1)} + \left(E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j \right) \sum_{k_0=0}^{S-1} e^{-\frac{2\pi i n_1 k_0}{S}}$$

ist. Die Identität

$$\sum_{k_0=0}^{S-1} e^{-\frac{2\pi i n_1 k_0}{S}} = \begin{cases} 0 & \text{für } n_1 \neq 0, \\ S & \text{für } n_1 = 0. \end{cases}$$

impliziert $D'_{(n_1, k_1)} = \bar{D}'_{(n_1, k_1)}$ für $n_1 \neq 0$ und

$$D'_{(0, k_1)} = \bar{D}'_{(0, k_1)} + S \cdot \left(E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j \right).$$

[0042] Daraus folgt

$$D_{(n_0, n_1)} = \begin{cases} \sum_{k_1=0}^{R-1} \bar{D}'_{(n_1, k_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_0 k_1}{R}} & \text{für } n_1 \neq 0, \\ \sum_{k_1=0}^{R-1} \bar{D}'_{(0, k_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_0 k_1}{R}} + S \cdot \left(E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j \right) \cdot \sum_{k_1=0}^{R-1} e^{-\frac{2\pi i n_0 k_1}{R}} & \text{für } n_1 = 0. \end{cases}$$

[0043] Weiterhin lässt sich aus der Identität

$$\sum_{k_1=0}^{R-1} e^{-\frac{2\pi i n_0 k_1}{R}} = \begin{cases} 0 & \text{für } n_0 \neq 0, \\ R & \text{für } n_0 = 0. \end{cases}$$

die Gleichungen

$$D_{(n_0, 0)} = \sum_{k_1=0}^{R-1} \bar{D}'_{(0, k_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_0 k_1}{R}} \quad \text{für } n_0 \neq 0,$$

und

$$\begin{aligned} D_{(0, 0)} &= \sum_{k_1=0}^{R-1} \bar{D}'_{(0, k_1)} + S \left(E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j \right) R, \\ &= \sum_{k_1=0}^{R-1} \left(\sum_{k_0=0}^{S-1} \bar{d}'_{(k_0, k_1)} \right) + N \left(E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \bar{d}_k + N \left(E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k + R - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} f_{k+jS} \right) + N \left(E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k + R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} \sum_{k=0}^{N-1} f_{k+jS} + N \left(E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j \right) \end{aligned}$$

schlussfolgern. Da mit k sowohl $k + R$ als auch $k + jS$ ein volles Restsystem modulo N durchlaufen, können die jeweiligen Summen ebenso von $k = 0$ bis $N - 1$ erfolgen. Dies zusammen mit dem Kreisschluss liefert:

$$\begin{aligned} D_{(0, 0)} &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} \sum_{k=0}^{N-1} f_{k+jS} + N \left(E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j \right) \\ &\stackrel{(5)}{=} 0 - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} 0 + N \left(E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j \right) = N \left(E_R - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} E_j \right). \end{aligned}$$

[0044] Wird demzufolge die Fourierharmonische $F_{(0,0)}$ nicht aus $D_{(0,0)}$ errechnet, sondern ihr direkt den Wert 0 zugewiesen, dann haben die semi-variablen Fehler ebenfalls keinen Einfluss auf die Teilungsergebnisse.

Teilungsfehler vom Drehtisch

[0045] Bei der Bestimmung der Teilungsfehler vom Drehtisch B_j (Rosette B) mit

$$j = 0, R, S, \dots, (R-1)S$$

werden völlig analog die gemessenen Werte (nach der Subtraktion des arithmetischen Mittels aller Messwerte in der Form der Konstante K_{PFDS} zum Erhalt der Kreisschlussbedingung) entsprechend dem Rosettenmuster ausgewertet:

$$B_j = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} M_{i,j}.$$

(7)

Teilungsfehler vom Prüfkörper

[0046] Nach der Beseitigung der Fehler aus Rosette B, bleibt

$$\begin{pmatrix} A_0 + C_0 & A_0 + C_{N-R} & A_0 + C_{N-S} & \dots & A_0 + C_{N-(R-1)S} \\ A_1 + C_1 & A_1 + C_{N-R+1} & A_1 + C_{N-S+1} & \dots & A_0 + C_{N-(R-1)S+1} \\ A_2 + C_2 & A_2 + C_{N-R+2} & A_2 + C_{N-S+2} & \dots & A_0 + C_{N-(R-1)S+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N-2} + C_{N-2} & A_{N-2} + C_{N-R-2} & A_{N-2} + C_{N-S-2} & \dots & A_0 + C_{N-(R-1)S-2} \\ A_{N-1} + C_{N-1} & A_{N-1} + C_{N-R-1} & A_{N-1} + C_{N-S-1} & \dots & A_0 + C_{N-(R-1)S-1} \end{pmatrix}$$

als PFDS-Matrix noch übrig. Aus diesen Zahlen werden die N Differenzwerte d_k für den PFD-Algorithmus gebildet (vgl. Gleichung 3). Bei der Auswahl wird die Gleichung 6 ausgenutzt:

$$d_0 = (A_R + C_0) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{0+iS} + C_0) = A_R - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} A_{0+iS},$$

$$d_1 = (A_{R+1} + C_1) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{1+iS} + C_1) = A_{R+1} - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} A_{1+iS},$$

$$d_2 = (A_{R+2} + C_2) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{2+iS} + C_2) = A_{R+2} - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} A_{2+iS},$$

$$\vdots$$

$$d_{N-2} = (A_{R-2} + C_{N-2}) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{N-2+iS} + C_{N-2}) = A_{R-2} - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} A_{N-2+iS},$$

$$d_{N-1} = (A_{R-1} + C_{N-1}) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{N-1+iS} + C_{N-1}) = A_{R-1} - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} A_{N-1+iS}.$$

Teilungsfehler vom Messgerät

[0047] Letztendlich verbleiben nur noch die Fehler aus Rosette C:

$$\begin{pmatrix} C_0 & C_{N-R} & C_{N-S} & C_{N-2S} & \cdots & C_{N-(R-1)S} \\ C_1 & C_{N-R+1} & C_{N-S+1} & C_{N-2S+1} & \cdots & C_{N-(R-1)S+1} \\ C_2 & C_{N-R+2} & C_{N-S+2} & C_{N-2S+2} & \cdots & C_{N-(R-1)S+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{N-2} & C_{N-R-2} & C_{N-S-2} & C_{N-2S-2} & \cdots & C_{N-(R-1)S-2} \\ C_{N-1} & C_{N-R-1} & C_{N-S-1} & C_{N-2S-1} & \cdots & C_{N-(R-1)S-1} \end{pmatrix}.$$

[0048] Aus diesen Einträgen kann durch eine entsprechende Mittelwertbildung die Abweichungen C_0, C_1, \dots und C_N bestimmt werden.

Messunsicherheitsbudget

[0049] In völliger Analogie zum Rosettenverfahren wird die Standardmessunsicherheit u_{dis} aus der Standardabweichung σ der Messwerte nach Beseitigung der Rosettenfehler A, B und C gewonnen. Hinzu werden Messunsicherheitsfaktoren wie Rundungsfehler und numerische Genauigkeit der Datensätze in u_{meas} erfasst. Aufgrund der Eigenschaft eines Fehlertrennverfahrens sind alle systematischen Abweichungen bekannt, so dass die Standardunsicherheit u_{sys} gleich Null ist. Nach dem Gaußschen Fortpflanzungsgesetz ergibt sich die um den Faktor k erweiterte Messunsicherheit als

$$U = U(k) = k \sqrt{u_{\text{dis}}^2 + u_{\text{meas}}^2 + u_{\text{sys}}^2} = k \sqrt{u_{\text{dis}}^2 + u_{\text{meas}}^2}.$$

Supplement 3: Primzahlpotenzen

Künstliche Ergänzung

[0050] Der große Nachteil des PFD-Verfahrens besteht darin, dass für die erste Indextransformation $k \leftrightarrow (k_0, k_1)$ mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes zwei teilerfremde Faktoren R und S , jeweils > 1 , gegeben sein müssen. D. h., handelt es sich bei der Teilungszahl N um eine Primzahlpotenz, dann lässt sich der Primfaktoralgorithmus nicht anwenden. Die Gleichungen aus (4) sind nämlich nur genau dann lösbar, wenn R und S teilerfremd zueinander sind. In der ersten Spalte der Anhangstabellen 4 und 5 sind alle Zahlen bis 150 aufgelistet, für die das PFD-Verfahren nicht anwendbar ist. Statistisch gesehen ist im Bereich bis 150 jede dritte Zahl nicht durch das PFD-Verfahren abgedeckt, bis 1000 jede vierte Teilungszahl. Mit dem Primzahlsatz lässt sich die

Anzahl der PFD-inkompatiblen Zahlen bis x nach unten durch $\frac{x}{\log(x)}$ abschätzen.

[0051] Dieses große Hindernis des PFD-Verfahrens kann umgegangen werden, indem man eine künstliche Ergänzung durchführt: Lässt sich das PFD-Verfahren aufgrund der Teilungszahl N nicht anwenden, wird die nächstgrößere Zahl N' , welche die PFD-Bedingung erfüllt, betrachtet. So ist z. B. bei $N = 5^1 = 5$ als N' die zusammengesetzte Zahl $6 = 2 \cdot 3$ zu wählen, oder bei $N = 2^3 = 8$ die zusammengesetzte Zahl $N' = 10 = 2 \cdot 5$. Im Allgemeinen muss die kleinste ganze Zahl $J \geq 0$ so bestimmt werden, dass $N' = N + J$ zusammengesetzt ist. In der Regel ist $J = 1$ (vgl. Tabelle 4 und 5).

[0052] Entscheidend bei der künstlichen Ergänzung ist, die für die Bildung der PFA-Differenzen d_k aus (3) notwendigen Indizes zu generieren. Um die besagte Indizierungsvorschrift einzuhalten, werden neben den neuen Drehtischpositionen

$$R - J, 1 \cdot S - J, 2 \cdot S - J, 3 \cdot S - J, \dots, (R - 1)S - J$$

auch J zusätzliche Zeilen benötigt. Werden diese Faktoren beim Ergänzen berücksichtigt, so ergibt sich zunächst folgendes Schema:

$$\left(\begin{array}{cccccc} M_{0,0} & \dots & M_{0,R-J} & M_{0,R} & \dots & M_{0,S-J} & M_{0,S} & \dots \\ M_{1,0} & \dots & M_{1,R-J} & M_{1,R} & \dots & M_{1,S-J} & M_{1,S} & \dots \\ M_{2,0} & \dots & M_{2,R-J} & M_{2,R} & \dots & M_{2,S-J} & M_{2,S} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{N-2,0} & \dots & M_{N-2,R-J} & M_{N-2,R} & \dots & M_{N-2,S-J} & M_{N-2,S} & \dots \\ M_{N-1,0} & \dots & M_{N-1,R-J} & M_{N-1,R} & \dots & M_{N-1,S-J} & M_{N-1,S} & \dots \\ \hline M_{N,0} & \dots & M_{N,R-J} & M_{N,R} & \dots & M_{N,S-J} & M_{N,S} & \dots \\ M_{N+1,0} & \dots & M_{N+1,R-J} & M_{N+1,R} & \dots & M_{N+1,S-J} & M_{N+1,S} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{N'-1,0} & \dots & M_{N'-1,R-J} & M_{N'-1,R} & \dots & M_{N'-1,S-J} & M_{N'-1,S} & \dots \end{array} \right)$$

[0053] Alle Zeilenindizes k mit $k \geq N$ sind nun jeweils modulo N zu interpretieren:

$$\left(\begin{array}{cccccc} M_{0,0} & \dots & M_{0,R-J} & M_{0,R} & \dots & M_{0,S-J} & M_{0,S} & \dots \\ M_{1,0} & \dots & M_{1,R-J} & M_{1,R} & \dots & M_{1,S-J} & M_{1,S} & \dots \\ M_{2,0} & \dots & M_{2,R-J} & M_{2,R} & \dots & M_{2,S-J} & M_{2,S} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{N-2,0} & \dots & M_{N-2,R-J} & M_{N-2,R} & \dots & M_{N-2,S-J} & M_{N-2,S} & \dots \\ M_{N-1,0} & \dots & M_{N-1,R-J} & M_{N-1,R} & \dots & M_{N-1,S-J} & M_{N-1,S} & \dots \\ \hline M_{0,0} & \dots & M_{0,R-J} & M_{0,R} & \dots & M_{0,S-J} & M_{0,S} & \dots \\ M_{1,0} & \dots & M_{1,R-J} & M_{1,R} & \dots & M_{1,S-J} & M_{1,S} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{N'-1,0} & \dots & M_{N'-1,R-J} & M_{N'-1,R} & \dots & M_{N'-1,S-J} & M_{N'-1,S} & \dots \end{array} \right)$$

(8)

[0054] Da $jS - J = R$ sein kann, ist die Anzahl der gesamten Messpunkte nach oben durch $N(2R + 1)$ abzuschätzen. In den meisten Fällen sind es aber genau $N(2R+1)$ Messpunkte, die es zu erfassen gilt. Nachdem die N Differenzwerte d_k aus den passenden Werten der Matrix (8) gebildet worden sind, kann der Primfaktoralgorithmus auf die bekannte Art und Weise angewandt werden.

PFDS-Algorithmus zur Fehlertrennung

[0055] Numerische Rechnungen, die für Primzahlpotenzen $7 < N < 8500$ durchgeführt worden sind, ergaben, dass $N' = N + 2$ genau dann gilt, wenn $N = 8, 16, 31$ oder 127 ist. Für alle anderen N -Werte ist $N' = N + 1$. Demnach reicht es, für die praktische Anwendung beim PFDS-Verfahren die Fälle $J = 0, 1, 2$ zu betrachten. In allgemeiner Form kann der PFDS-Algorithmus wie folgt beschrieben werden:

- I. Für gegebenes N berechne $N' = N + J$. D. h., es ist $J \geq 0$ so zu bestimmen, dass N' die kleinste zusammengesetzte Zahl $\geq N$ ist.
- II. Lege die Drehtischpositionen anhand der Primfaktorzerlegung $N' = RS$ mit $1 < R < S$ für teilerfremde R und S fest:
 - (i) $0, R$ und jS mit $1 \leq j \leq R - 1$;
 - (ii) $R - J, jS - J$ mit $1 \leq j \leq R - 1$.
- III. Bestimme die Teilungsfehler der Rosette B gemäß (7). Eliminiere diese anschließend aus den Messwerten.
- IV. Führe das Ergänzungsschema nach (8) durch.
- V. Wende den PFD-Algorithmus aus den Kapiteln 2.2.3 und 2.2.4 für N' an, um die Teilungsfehler der Rosetten A und C iterativ zu berechnen. Das bedeutet, dass eine feste Kombination von N' Tupeln der Länge R , nämlich

$$(k + R; k + 0 \cdot S, k + 1 \cdot S, k + 2 \cdot S, \dots, k + (R - 1) \cdot S),$$

(9)

mit $0 \leq k \leq N' - 1$, notwendig ist, um die N' Differenzwerte d_k zu bilden.

VI. Da durch den Primfaktoralalgorithmus nur Werte $f_0, f_1, \dots, f_{N'-1}$ mit

$$\sum_{k=0}^{N'-1} f_k = 0$$

bestimmt werden, ist bei der Auswertung zu beachten, dass die „wahren Werte“ A_j sich erst durch

$$A_j = f_j - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k = f_j + \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{N'-1} f_k$$

ergeben. Dadurch wird das Kreisschlussprinzip für die A_j , d. h.

$$\sum_{j=0}^{N-1} A_j = 0$$

eingehalten.

Supplement 4: Reihenfolge im PFDS-Fehlertrennalgorithmus

[0056] Es ist ebenfalls möglich, die Inkonsistenz des PFD-Algorithmus gegenüber „semi-variabler“ Fehlereinflüsse für die Berechnung der Teilungsabweichungen von Rosette A zu benutzen. In diesem Fall müssen die Abweichungen der Rosette B nicht vorher eliminiert werden (vgl. III.). Die Differenzen d_k können direkt aus der vollständigen PFDS-Matrix

$$\begin{pmatrix} A_0 + B_0 + C_0 & A_0 + B_R + C_{N-R} & A_0 + B_S + C_{N-S} & \dots & A_0 + B_{(R-1)S} + C_{N-(R-1)S} \\ A_1 + B_0 + C_1 & A_1 + B_R + C_{N-R+1} & A_1 + B_S + C_{N-S+1} & \dots & A_0 + B_{(R-1)S} + C_{N-(R-1)S+1} \\ A_2 + B_0 + C_2 & A_2 + B_R + C_{N-R+1} & A_2 + B_S + C_{N-S+2} & \dots & A_0 + B_{(R-1)S} + C_{N-(R-1)S+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N-2} + B_0 + C_{N-2} & A_{N-2} + B_R + C_{N-R-2} & A_{N-2} + B_S + C_{N-S-2} & \dots & A_0 + B_{(R-1)S} + C_{N-(R-1)S-2} \\ A_{N-1} + B_0 + C_{N-1} & A_{N-1} + B_R + C_{N-R-1} & A_{N-1} + B_S + C_{N-S-1} & \dots & A_0 + B_{(R-1)S} + C_{N-(R-1)S-1} \end{pmatrix}$$

gebildet werden:

$$d_0 = (A_R + B_R + C_0) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{0+iS} + B_{0+iS} + C_0) = (A_R + B_R) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{0+iS} + B_{0+iS}),$$

$$d_1 = (A_{R+1} + B_R + C_1) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{1+iS} + B_{0+iS} + C_1) = (A_{R+1} + B_R) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{1+iS} + B_{0+iS}),$$

$$d_2 = (A_{R+2} + B_R + C_2) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{2+iS} + B_{0+iS} + C_2) = (A_{R+2} + B_R) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{2+iS} + B_{0+iS}),$$

⋮

$$d_{N-2} = (A_{R-2} + B_R + C_{N-2}) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{N-2+iS} + B_{0+iS} + C_{N-2}) = (A_{R-2} + B_R) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{N-2+iS} + B_{0+iS}),$$

$$d_{N-1} = (A_{R-1} + B_R + C_{N-1}) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{N-1+iS} + B_{0+iS} + C_{N-1}) = (A_{R-1} + B_R) - \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{R-1} (A_{N-1+iS} + B_{0+iS}).$$

[0057] Daraus lassen sich A_0, A_1, \dots, A_{N-1} ableiten. Im Anschluss erfolgt die Berechnung der restlichen Abweichungen aus den Rosetten B und C auf die bekannte Art und Weise.

Supplement 5: Alternative Messstrategie und Reproduzierbarkeit

[0058] In den Supplements 1, 2 und 3 wurde eine Strategie zur Trennung der Rosettenfehler hergeleitet. Zunächst wurden die Abweichungen der Rosette B, anschließend die der Rosette A und schlussendlich die der Rosette C bestimmt. Zu diesem Zweck wurden die Drehtischpositionen gemäß II.(i) und II.(ii) im PFDS-Algorithmus festgelegt. Mit dem Supplement 4 können Teilungsfehler auch wahlweise in der Reihenfolge A, B und C ermittelt werden.

[0059] Wie sich bei der Validierung des PFDS-Verfahrens (vgl. Punkt 3) herausgestellt hat, wird durch die verringerte Messpunktaufnahme gegenüber dem Rosettenverfahren beim PFDS-Verfahren eine gewisse statistische „Reichhaltigkeit“ eingebüßt, die sich hauptsächlich in Form einer leicht vergrößerten Messunsicherheit äußert. Ist man gewillt, andere Möglichkeiten für R (falls vorhanden) zu nehmen oder die Rollen von R und S zu vertauschen, so ließe sich unter Umständen eine kleinere (Standard)Messunsicherheit erzielen. Auch ermöglichen zusätzliche Drehtischpositionen

- (iii) $0+i, R+i$ und $jS+i$ mit $1 \leq j \leq R-1$;
- (iv) $R - J + i, jS - J + i$ mit $1 \leq j \leq R - 1$,

wobei $1 \leq i \leq N' - 1$ ist, eine größere statistische Stichprobe bei Bildung der PFDS-Differenzen d_k ($0 \leq k \leq N' - 1$). Darüber hinaus lassen sich aus diesen N' Kombinationen sowohl qualitative als auch quantitative Aussagen über die Reproduzierbarkeit der Fehlertrennung ableiten. Für die meisten praktischen Anwendungen erscheint der intuitive Fall mit $i = 0$ und einem möglichst minimalen R als völlig ausreichend. Würde i hingegen alle möglichen N' Werte durchlaufen, so hätte man einen vollständigen Datensatz nach dem Rosettenverfahren gemessen. Je nach den Bedürfnissen der jeweiligen Anwendung gilt es, eine gute Balance zwischen Messaufwand und -unsicherheit zu finden.

[0060] Besteht ein Interesse, die Teilungsfehler der Rosette C vor den Abweichungen der Rosette A zu bestimmen, dann bietet sich die Benutzung der folgenden Drehtischpositionen

- (a) $0, N - R$ und $N - jS$ mit $1 \leq j \leq R - 1$;
- (b) $N - R + J, N - jS + J$ mit $1 \leq j \leq R - 1$,
bzw. zusätzlich mit den Variationen
- (c) $0+i, N-R+i$ und $N - jS + i$ mit $1 \leq j \leq R - 1$;
- (d) $N-R+J+i, N- jS+J+i$ mit $1 \leq j \leq R- 1$

an. Für $i = 0$ ergibt sich demzufolge die PFDS-Matrix

$$\begin{pmatrix} M_{0,0} & \dots & M_{0,N-R} & M_{0,N-R+J} & \dots & M_{0,N-S} & M_{0,N-S+J} & \dots \\ M_{1,0} & \dots & M_{1,N-R} & M_{1,N-R+J} & \dots & M_{1,N-S} & M_{1,N-S+J} & \dots \\ M_{2,0} & \dots & M_{2,N-R} & M_{2,N-R+J} & \dots & M_{2,N-S} & M_{2,N-S+J} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{N-2,0} & \dots & M_{N-2,N-R} & M_{N-2,N-R+J} & \dots & M_{N-2,N-S} & M_{N-2,N-S+J} & \dots \\ M_{N-1,0} & \dots & M_{N-1,N-R} & M_{N-1,N-R+J} & \dots & M_{N-1,N-S} & M_{N-1,N-S+J} & \dots \\ \hline M_{0,0} & \dots & M_{0,N-R} & M_{0,N-R+J} & \dots & M_{0,N-S} & M_{0,N-S+J} & \dots \\ M_{1,0} & \dots & M_{1,N-R} & M_{1,N-R+J} & \dots & M_{1,N-S} & M_{1,N-S+J} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{N'-1,0} & \dots & M_{N'-1,N-R} & M_{N'-1,N-R+J} & \dots & M_{N'-1,N-S} & M_{N'-1,N-S+J} & \dots \end{pmatrix}$$

[0061] Nach der Beseitigung der Rosette B gilt es hier, die Rosettenfehler von C vor A zu berechnen. Das bedeutet, dass anhand der Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc} A_0 + C_0 & A_0 + C_R & A_0 + C_S & \dots & A_0 + C_{(R-1)S} \\ A_1 + C_1 & A_1 + C_{R+1} & A_1 + C_{S+1} & \dots & A_0 + C_{(R-1)S+1} \\ A_2 + C_2 & A_2 + C_{R+2} & A_2 + C_{S+2} & \dots & A_0 + C_{(R-1)S+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N-2} + C_{N-2} & A_{N-2} + C_{R-2} & A_{N-2} + C_{S-2} & \dots & A_0 + C_{(R-1)S-2} \\ A_{N-1} + C_{N-1} & A_{N-1} + C_{R-1} & A_{N-1} + C_{S-1} & \dots & A_0 + C_{(R-1)S-1} \\ \hline A_0 + C_0 & A_0 + C_R & A_0 + C_S & \dots & A_0 + C_{(R-1)S} \\ A_1 + C_1 & A_1 + C_{R+1} & A_1 + C_{S+1} & \dots & A_0 + C_{(R-1)S+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{J-1} + C_{J-1} & A_{J-1} + C_{R+J-1} & A_{J-1} + C_{S+J-1} & \dots & A_{J-1} + C_{(R-1)S+J-1} \end{array} \right) \cdot$$

die PFDS-Differenzen d_k gemäß (3) gebildet werden. Aus der k -ten Zeile wird die Differenz d_k für die Berechnung der Teilungsfehler der Rosette C unter Benutzung von (6) gewonnen:

$$d_k = C_{k+R} - \frac{1}{R} \sum_{j=0}^{R-1} C_{k+jS}.$$

[0062] Unter Anwendung des Supplements 4 kann auch bei diesen Drehtischpositionen die Reihenfolge C, B und A bei der Bestimmung der Teilungsfehler ermöglicht werden.

Supplement 6: Fehlertrennung auf mehreren Kreisteilungen

[0063] Einige Kreisverkörperungen wie beispielsweise Planetengetriebe weisen mehrere Kreisteilungen auf, die durch einen gemeinsame Mittelpunkt miteinander verbunden sind. In diesem Fall erfolgt die Aufnahme der Messpunkte schrittweise: Nachdem eine Kreisteilung vollständig erfasst wurde, wird die Sensorführung zur nächsten Kreisteilung gefahren, um einen weiteren kompletten PFDS-Datensatz zu messen. Im Zuge dieses Prozesses können Führungsfehler des Messgerätes einen Offset θ in den nachfolgenden Messwerten verursachen.

[0064] Bekanntlich wird zum Erhalt des Kreisschlussprinzips an einer Kreisteilung ohne Offset von jedem einzelnen der L Messwerten x_i das arithmetische Mittel

$$\bar{x} := \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_i$$

abgezogen:

$$x_j - \bar{x}.$$

[0065] Sind die Messwerte \tilde{x}_i hingegen mit einem konstant-systematischen Fehler θ versehen, d. h.

$$\tilde{x}_j = x_j + \theta,$$

so ist das dazugehörige arithmetische Mittel

$$\tilde{\bar{x}} := \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \tilde{x}_i = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (x_i + \theta) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_i + \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \theta = \bar{x} + \frac{1}{L} \cdot L \cdot \theta = \bar{x} + \theta$$

für den Kreisschluss zu betrachten. Die Gleichung

$$\tilde{x}_i - \tilde{\bar{x}} = (x_i + \theta) - (\bar{x} + \theta) = x_i - \bar{x}$$

impliziert jedoch, dass der (unbekannte) Offset θ nicht in die PFD-Auswertung eingeht. Insbesondere ist θ für den eigentlichen PFDS-Algorithmus und der damit verbundenen Messunsicherheitsanalyse irrelevant.

[0066] Im Folgenden wird die Erfindung anhand der beigefügten Zeichnungen näher erläutert. Dabei zeigt

Fig. 1 eine erfindungsgemäße Vorrichtung zum Durchführen eines erfindungsgemäßen Verfahrens,

Fig. 2 eine schematische Ansicht des zu vermessenden Werkstücks, der Teilung des Drehtischs und der Antastung,

Fig. 3 den Vergleich von Messungen des Teilungsfehlers mit Verfahren nach dem Stand der Technik und gemäß dem erfindungsgemäßen Verfahren für einen ersten Satz an Messparametern,

Fig. 4 den Vergleich für einen zweiten Satz an Messparametern,

Fig. 5 den Vergleich für einen dritten Satz an Messparametern,

Fig. 6 den Vergleich für einen vierten Satz an Messparametern,

Fig. 7 einen Vergleich der notwendigen Anzahl an Drehtischpositionen in Abhängigkeit von der Anzahl an Teilungen des Prüfkörpers für Verfahren nach dem Stand der Technik und für das erfindungsgemäße Verfahren, und

Fig. 8 einen Vergleich der relativen Messzeit für das erfindungsgemäße Verfahren im Vergleich zu Verfahren nach dem Stand der Technik.

[0067] **Fig. 1** zeigt eine Ansicht einer erfindungsgemäßen Messvorrichtung **10** zum Messen der Kreisteilungsfehler von Flanken 12.1, 12.2, ... eines Werkstücks **14**, im vorliegenden Fall in Form eines Zahnrads. Das Werkstück **14** besitzt eine Kreisteilung mit einer Kreisteilungszahl N . Die Messvorrichtung **10** umfasst einen Drehtisch **16**, auf dem das Werkstück **14** befestigt werden kann. Die Messvorrichtung **10** weist zudem eine Teilungsabweichungs-Messvorrichtung **18** auf, die im vorliegenden Fall durch ein Koordinatenmessgerät gebildet ist.

[0068] Die Teilungsabweichungs-Messvorrichtung ist mit einer Auswertevorrichtung **20** verbunden, die schematisch eingezeichnet ist. Die Auswertevorrichtung **20** steuert zudem den Drehtisch **16** an. Zum Durchführen eines erfindungsgemäßen Verfahrens wird der Drehtisch **16** zunächst auf eine erste Drehtischposition $r = 0$ gefahren. In dieser Drehtischposition werden $i=1,2,\dots$ Messdurchläufe durchgeführt, das heißt, dass die Teilungsabweichungs-Messvorrichtung **18** bei feststehendem Drehtisch die Flanken **12** (Bezugszeichen ohne Zählsuffix beziehen sich stets auf alle entsprechenden Objekte) antastet. Danach steuert die Auswertevorrichtung **20** den Drehtisch **16** so an, dass dieser auf eine zweite Drehtischposition dreht. Es werden erneut alle Flanken mittels der Teilungsabweichungs-Messvorrichtung **18** angetastet.

[0069] **Fig. 2** zeigt schematisch das Werkstück **14**, das aber in **Fig. 2** mit einer abweichenden Teilungszahl N eingezeichnet ist. Im oberen Teilbild sind schematisch die Positionen eines Tastkörpers **22** der Teilungsabweichungs-Messvorrichtung **18** an den verschiedenen Antaststellen gezeigt. Die einzelnen Flanken sind durchnummeriert. Wenn beispielsweise im Folgenden davon gesprochen wird, dass die Drehtischposition $r = 0, 2$ und 5 angefahren werden, so ist darunter zu verstehen, dass die Teilungsabweichungs-Messvorrichtung **18** zunächst an einer beliebig vorgebbaren 0 -Position misst, danach der Drehtisch **16** um zwei Zähne weiterdreht und die Messung wiederholt wird. Danach wird der Drehtisch um drei Zahnpositionen weitergedreht. Das geschilderte Vorgehen wird für zumindest so viele Drehtischwinkepositionen durchgeführt, die notwendig sind, um das oben beschriebene Verfahren durchzuführen.

[0070] Die an der j -ten Drehtischposition im i -ten Messdurchlauf gemessene Teilungsfehler wird die oben beschriebene Matrix M'_{ij} eingetragen. Die Auswertevorrichtung **20** errechnet daraus automatisch gemäß dem oben angegebenen Verfahren die Kreisteilungsabweichung A_i .

[0071] Zur Validierung des oben beschriebenen Verfahrens wurden zwei Werkstücke **14** in Form von Verzahnungsnormalen eingesetzt. Das weitere Vorgehen wird im Folgenden beschrieben.

Validierung des PFDS-Verfahrens

Experimentelles Setup

[0072] Jeder Prüfkörper wurde auf einen hochauflösenden Drehtisch montiert und die Kreisteilung der Ordnung N , die durch die linken bzw. rechten Flanken gegeben ist, taktil mit Hilfe eines Verzahnungsmessgerätes gemessen.

[0073] Entsprechend dem Rosettenverfahren (vgl. **Fig. 1**) erfolgte die Messung in einer Schritt-für-Schritt-Rotation des Prüflings, bis alle notwendigen Relativlagen durchlaufen waren, und einer sukzessiven Abtastung aller linken bzw. rechten Flanken. Für die PFDS-Auswertung wurden zu Beginn die Drehtischpositionen mit dem Nummern

- $0, R$ und jS mit $1 \leq j \leq R - 1$;
- $R - J$ und $jS - J$ mit $1 \leq j \leq R - 1$

selektiert und später um weitere Positionen ergänzt. Anhand der Indexvorschrift aus (3) bzw. dem Tupel aus (9) sind die entsprechenden Differenzen d_k gebildet worden. Anschließend wurden die PFDS-Ergebnisse mit der Rosettenauswertung, dessen Werte als Referenz angesehen wurden, verglichen.

Beispiel für $N = 10$

[0074] Im ersten Beispiel wurde das PFDS-Fehlertrennverfahren an einem modifizierten Verzahnungsnormal mit einem Teilungsmesskreisdurchmesser von 63 mm und $N = 10$ Teilungen experimentell getestet. Aufgrund von $R = 2$ und $S = 5$ ergeben sich die PFDS-Drehtischpositionen $r = 0, 2$ und 5 . Die Ergebnisse der rechten Flanken sind in der **Fig. 3** illustriert. Während das Rosettenverfahren eine Standardunsicherheit von $0.0587 \mu\text{m}$ aufwies, lag sie beim PFDS-Verfahren bei $0.0884 \mu\text{m}$. Als erweiterte Messunsicherheit mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ ergibt sich folglich $0.3775 \mu\text{m}$ für das PFDS- und $0.3279 \mu\text{m}$ für das Rosettenverfahren. Die **Fig. 3** zeigt die Auswerteergebnisse in der Form auf den Drehtischpositionen $[0,2,5]$ beruhende PFDS- im Vergleich zur Rosettenauswertung ($N' = N + J = 10 + 0 = 10$, $R=2$, $S=5$).

Beispiel für $N = 13$

[0075] Zudem wurde für die Erprobung der Reproduzierbarkeit des PDFS-Verfahrens ein weiteres Zahnrad mit einem Teilkreisdurchmesser von 120 mm und $N = 13$ Zähnen betrachtet. Aus der Tabelle 4 lässt sich

$$N' = N + J = 13 + 1 = 14 = 2 \cdot 7 = R \cdot S$$

entnehmen. Exemplarisch sind in der **Fig. 4** die Resultate der linken Flanken mit den Drehtischpositionen $[0, 1,2,6,7]$ wiedergegeben. Die Wahl eines weiteren korrespondierenden Drehtischtupels,

$$[0 + 1, 1 + 1, 2 + 1, 6 + 1, 7 + 1] = [1, 2, 3, 7, 8],$$

führte zu ähnlichen Resultaten (vgl. **Fig. 5**).

[0076] Bei der Gegenüberstellung der Messunsicherheiten kann festgestellt werden, dass das PFDS-Verfahren sowohl bei $[0, 1,2,6,7]$ als auch bei $[1, 2,3,7,8]$ jeweils eine größere Unsicherheit als das Rosettenverfahren aufweist. Durch die Bildung des arithmetischen Mittels aus den erhaltenen Teilungsabweichungen der zwei Tupeln (vgl. **Fig. 6**) kann nicht nur eine geringere Messunsicherheit, sondern auch kleinere Unterschiede zu den Rosettenwerten erzielt werden. Eine Übersicht der Ergebnisse ist in der Tabelle 3 gegeben.

[0077] Im Großen und Ganzen zeigen die PFDS-Resultate eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus der Rosettenauswertung. Die geringen Differenzen beider Verfahren sind größtenteils auf zufällige Fehler und Rundungenauigkeiten zurückzuführen.

Tabelle 3: Vergleich der drei Messverfahren für ein Zahnrad mit N = 13 Teilungen

Methode	# Messpunkte/Drehtischpositionen	Standard-/Messunsicherheit (k = 2)
CC	169/13	0.0684/0.3427 µm
PFD	nicht anwendbar	nicht anwendbar
PFDS [0,1,2,6,7]	68/5	0.1136/0.4280 µm
PFDS [1,2,3,7,8]	68/5	0.1163/0.4338 µm
PFDS [0,1,2,3,6,7,8]	91/7	0.0805/0.3631 µm

Vorteile des PFDS-Verfahrens

[0078] Neben einer leicht zu realisierenden und effizienten Fehlertrennung für Kreisverkörperungen mit beliebiger Teilungszahl N führt die neu entwickelte Messstrategie aus Punkt 2.1 zu einer deutlich geringeren Anzahl an notwendigen Drehtischpositionen sowohl gegenüber dem Rosetten- als auch dem PFD-Verfahren. In der **Fig. 7** wird dieser Sachverhalt für eine Teilungszahl N zwischen 10 und 50 verdeutlicht. Während mit wachsender Teilungszahl N sich auch die Anzahl der Drehtischpositionen beim PFD- und Rosettenverfahren direkt proportional erhöht, bleibt beim PFDS-Verfahren die Anzahl der Drehtischpositionen nahezu innerhalb eines festen Bereiches.

[0079] Der zeitliche und damit wirtschaftliche Vorteil des PFDS- gegenüber dem PFD- und Rosettenverfahren ist in der **Fig. 8** exemplarisch dargestellt. Die zeitlichen Unterschiede der Verfahren werden mit steigendem N immer deutlicher. Das bedeutet, dass je größer N wird, umso mehr die Stärken des PFDS-Verfahrens zum Tragen kommen.

[0080] Weiterhin belegen die experimentellen Beispiele, dass sich das neue PFDS-Verfahren gut für eine breitere Anwendung in der Messung von Teilkreisabweichungen und auch darüber hinaus, beispielsweise in der Rundheitsmesstechnik eignet.

Fazit und Ausblick

[0081] Auf der Basis der PFD-Selbstkalibrierung und dem Rosettenverfahren wurde ein neuartiges und effizientes Fehlertrennverfahren, das PFDS-Verfahren, für verkörperte Kreisteilungen beschrieben und anhand praktischer Beispiele demonstriert. Die Resultate der experimentellen Validierung zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen des Rosettenverfahrens. Die PFDS-Ergebnisse sind zwar mit einer leicht erhöhten (Standard)Messunsicherheit behaftet, was im Wesentlichen durch die verringerte Anzahl an Messungen der PFDS-Methode und den Rundungsungenauigkeiten beim Primfaktoralgorithmus zu erklären ist, jedoch konnte die benötigte Messzeit drastisch reduziert werden. Gleichzeitig konnte eine hochgenaue Bestimmung der systematischen Abweichungen des Dreirosettenmodells gewährleistet werden.

[0082] Aufgrund seiner großen Flexibilität in Form verschiedener Möglichkeiten bei der R- oder Drehtischpositionenauswahl erlaubt das PFDS-Verfahren des Weiteren in Abhängigkeit der Anwendung Messaufwand und -unsicherheit in ein Gleichgewicht zu bringen. Liegt die Priorität auf eine geringe Anzahl an Messpunkten und wird dafür eine erhöhte Messunsicherheit in Kauf genommen, so ist ein minimaler R-Wert und $i = 0$ im Tupel

$$(k + R + i; k + 0 \cdot S + i, k + 1 \cdot S + i, k + 2 \cdot S + i, \dots, k + (R - 1) \cdot S + i) \quad (10)$$

zu wählen. Ist hingegen eine geringere Standardmessunsicherheit gefragt, dann ist eine höhere statistische Stichprobe notwendig, so dass R möglichst groß gewählt und i aus (10) mehrere Werte zwischen 0 und $N' - 1$ durchlaufen sollte.

[0083] Insgesamt konnten durch die Supplements die Stärken vom PFD- und Rosettenverfahren erhalten sowie deren Schwächen bereinigt werden. Das vom Rosettenverfahren adaptierte Fehlermodell ließe sich noch um weitere Abweichungskomponenten wie z. B. Exzentrizität und Taumeln des Drehtisches erweitern. In einem zusätzlichen Supplement können die Möglichkeiten und Grenzen einer Fehlermodellerweiterung diskutiert werden.

A Anhang

Tabelle 4: Ergänzungsliste für $1 \leq N \leq 80$ mit allen Kombinationen teilerfremder Primfaktoren R und S, $1 < R < S$

N	J	$N' = N + J$	R	S	N^2	$N(2R+1)$
2	4	6	2	3	4	10
3	3	6	2	3	9	15
4	2	6	2	3	16	20
5	1	6	2	3	25	25
7	3	10	2	5	49	35
8	2	10	2	5	64	40
9	1	10	2	5	81	45
11	1	12	3	4	121	77
13	1	14	2	7	169	65
16	2	18	2	9	256	80
17	1	18	2	9	289	85
19	1	20	4	5	361	171
23	1	24	3	8	529	161
25	1	26	2	13	625	125
27	1	28	4	7	729	243
29	1	30	2 3 5	15 10 6	841	145 203 319
31	2	33	3	11	961	217
32	1	33	3	11	1024	224
37	1	38	2	19	1369	185
41	1	42	2 3 6	21 14 7	1681	205 287 533
43	1	44	4	11	1849	387
47	1	48	3	16	2209	329
49	1	50	2	25	2401	245
53	1	54	2	27	2809	265
59	1	60	3 4 5	20 15 12	3481	413 531 649
61	1	62	2	31	3721	305
64	1	65	5	13	4096	704
67	1	68	4	17	4489	603
71	1	72	8	9	5041	1207
73	1	74	2	37	5329	365
79	1	80	5	16	6241	869

Tabelle 5: Ergänzungsliste für $81 \leq N \leq 150$ mit allen Kombinationen teilerfremder Primfaktoren R und S, $1 < R < S$

N	J	$N' = N + J$	R	S	N^2	$N(2R+1)$
81	1	82	2	41	6561	405
83	1	84	3 4 7	28 21 12	6889	581 747 1245
89	1	90	2 5 6	45 18 15	7921	445 979 1157
97	1	98	2	49	9409	485
101	1	102	2 3 6	51 34 17	10201	505 707 1313
103	1	104	8	13	10609	1751
107	1	108	4	27	11449	963
109	1	110	2 5 10	55 22 11	11881	545 1199 2289
113	1	114	2 3 6	57 38 19	12769	565 791 1469
121	1	122	2	61	14641	605
125	1	126	2 7 9	63 18 14	15625	625 1875 2375
127	2	129	3	43	16129	889
128	1	129	3	43	16348	896
131	1	132	3 4 11	44 33 12	17161	917 1179 3013
137	1	138	2 3 6	69 46 23	18769	685 959 1781
139	1	140	4 5 7	35 28 20	19321	1251 1529 2085
149	1	150	2 3 6	75 50 25	22201	745 1043 1937

Bezugszeichenliste

- 10 Messvorrichtung
- 12 Flanke
- 14 Werkstück

- 16 Drehtisch
- 18 Teilungsabweichungs-Messvorrichtung
- 20 Tastkörper

Patentansprüche

1. Verfahren zum Messen der Kreisteilungsfehler von Flanken (12) eines Werkstücks (14) einer Kreisteilung mit Teilungszahl N, mit den Schritten:

- (a) Anordnen des Werkstücks (14) auf einem Drehtisch (16), der in der Teilungszahl N in äquidistante Winkelpositionen teilbar ist,
- (b) Messen der Teilungsabweichung aller Kreisteilungen in vorgegebenen Drehtischwinkelpositionen des Drehtischs (16), wobei die Teilungsabweichung die Differenz zwischen der gemessenen Ist-Position der Flanke (12) und der bei idealer Kreisteilung zu erwartenden Soll-Position ist, und
- (c) Berechnen der Kreisteilungsfehler aus den Teilungsabweichungen und den Drehtischwinkelpositionen,
- (d) wobei die Teilungsabweichungen zumindest an den Drehtischwinkelpositionen $\{0, R, \lambda \cdot S$ für alle λ mit $1 \leq \lambda \leq R-1\}$ gemessen werden, mit
 - $1 < R < S$,
 - $N = R \cdot S$ und wobei
 - R und S teilerfremd sind, und
- (e) die Koordinaten an weniger als N und zumindest (R+1) Drehtischwinkelpositionen gemessen werden **dadurch gekennzeichnet**, dass
- (f) das Berechnen der Kreisteilungsfehler aus den Teilungsabweichungen Schritte umfasst, die
 - einem Ergänzen einer Matrix der Messergebnisse um weitere Matrixelemente, sodass eine ergänzte Matrix erhalten wird,
 - einem Anwenden des Primfaktorzerlegungsverfahrens auf die ergänzte Matrix und
 - einem Herausrechnen des Einflusses der Ergänzens aus dem Ergebnis, das beim Anwenden des Primfaktorzerlegungsverfahrens erhalten wurde, entsprechen.

2. Verfahren nach Anspruch 1, **dadurch gekennzeichnet**, dass

- (i) $N > 7$ gilt,
- (ii) die Teilungsabweichungen an höchstens $N(2R+1)$, insbesondere höchstens $2R+1$ Drehtischwinkelpositionen gemessen werden und
- (iii) die Teilungsabweichungen an zumindest
 - $R+1$, wenn $J = 0$,
 - $2 \cdot R + 1$, wenn $J \neq 0$ und $S - 1 \neq R$ und
 - $2 \cdot R$, wenn $J \neq 0$ und $S - 1 = R$ Drehtischwinkelpositionen gemessen werden.

3. Verfahren nach einem der vorstehenden Ansprüche, **dadurch gekennzeichnet**, dass das Berechnen der Kreisteilungsfehler aus den Teilungsabweichungen die folgenden Schritte aufweist oder äquivalent dazu ist:

- (a) Abziehen des arithmetischen Mittels (K_{PFDS}) aller Matrixelemente einer Matrix $M'_{i,j}$ der gemessenen Teilungsfehler im i-ten Messdurchlauf an der j-ten Drehtischposition von dieser Matrix, sodass eine normierte Messwertmatrix $M^0_{i,j}$ erhalten wird,
- (b) Ergänzen der normierten Messwertmatrix $M^0_{i,j}$ zu einer ergänzten Matrix $N' \times N'$ (mit $N'=N+J$)-Matrix $M_{i,j}$ durch

$$M_{i,j} = \begin{cases} M^0_{i,j} & \text{für } 0 \leq i \leq N-1 \\ M^0_{N-i,j} & \text{für } N \leq i \leq N+J-1 \end{cases}$$

- (c) Bilden von $N'=N+J$ Differenzen d_k aus den Einträgen der ergänzten Matrix $M_{i,j}$ gemäß der Vorschrift

$$d_k = m_{k+R} - \frac{1}{R} \left(M_{k,0} + \sum_{j=1}^{R-1} s m_{k+jS} \right), 0 \leq k \leq N'-1,$$

mit

$$m_{k+R} = \begin{cases} M_{k+R,R} & \text{für } k+R \leq N'-1, \\ M_{N'-(k+R),R-1} & \text{für } N' \leq k+R; \end{cases}$$

und

$$sm_{k+jS} = \begin{cases} M_{k+jS,jS} & \text{für } k+jS \leq N'-1, \\ M_{N'-(k+jS),jS-1} & \text{für } N' \leq k+jS. \end{cases}$$

(d) Durchführen einer ersten Indextransformation $d_k \leftrightarrow d_{(k_0,k_1)}$ für alle k mit $0 \leq k \leq N'-1$:

$$k \equiv R \cdot R_S \cdot k_0 + S \cdot S_R \cdot k_1 \pmod{N'}$$

mit $k \equiv k_0 \pmod{S}$ und $k \equiv k_1 \pmod{R}$ sowie $R \cdot R_S \equiv 1 \pmod{S}$ und $S \cdot S_R \equiv 1 \pmod{R}$.

(e) Durchführen einer diskreten Fourier-Transformation von $d_{(k_0,k_1)}$ für alle k_1 mit $0 \leq k_1 \leq R-1$, sodass eine erste diskrete Fouriertransformierte $D'(n_1,k_1)$ erhalten wird:

$$D'_{(n_1,k_1)} := \sum_{k_0=0}^{S-1} d_{(k_0,k_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_1 k_0}{S}}, 0 \leq n_1 \leq S-1.$$

(f) Durchführen einer weiteren diskreten Fourier-Transformation von $D'_{(n_1,k_1)}$ für $0 \leq n_1 \leq S-1$, sodass eine zweite diskrete Fouriertransformierte $D(n_0,n_1)$ erhalten wird:

$$D_{(n_0,n_1)} := \sum_{k_1=0}^{R-1} D'_{(n_1,k_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_0 k_1}{R}}$$

(g) Berechnen einer zweidimensionalen Fourierharmonischen $F_{(n_0,n_1)}$ aus der zweiten diskreten Fouriertransformierten:

$$F_{(0,0)} := 0,$$

$$F_{(0,n_1)} := \frac{D_{(0,n_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_1 R}{S}}}{1 - e^{-\frac{2\pi i n_1 R}{S}}} \text{ für } n_1 \neq 0,$$

$$F_{(n_0,n_1)} := D_{(n_0,n_1)} \cdot e^{-\frac{2\pi i n_1 R}{S}} \text{ für } n_0 \neq 0.$$

(h) Durchführen einer zweiten Indextransformation $F_{(n_0,n_1)} \leftrightarrow F_n$, sodass aus der zweidimensionalen Fourierharmonischen $F_{(n_0,n_1)}$ eine eindimensionale Fourierharmonische F_n ($0 \leq n \leq N'-1$) entsteht:

$$n \equiv S \cdot n_0 + R \cdot n_1 \pmod{N'}$$

mit $n \equiv n_0 \pmod{R}$ und $n \equiv n_1 \pmod{S}$

(i) Berechnen einer inversen Fourierharmonischen f_k aus den eindimensionalen Fourierharmonischen F_n gemäß

$$f_k = \frac{1}{N'} \sum_{n=0}^{N'-1} F_n \cdot e^{-\frac{2\pi i n k}{N'}}, 0 \leq k \leq N'-1$$

und

(j) Berechnen der N Kreisteilungsabweichungen A_i aus den inversen Fourierharmonischen f_k gemäß

$$A_i = f_i - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k = f_i + \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{N'-1} f_k, 0 \leq i \leq N-1,$$

4. Verfahren nach einem der vorstehenden Ansprüche, **gekennzeichnet durch** die Schritte:

(a) Eliminieren des Teilungsfehlers der Drehtischs (16) aus der normierten Messwertmatrix M_{ij}^0 gemäß

$$B_j = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} M_{i,j}^0$$

sodass für jede Drehtischposition ein Drehtischfehler-Teilungsfehlerwert B_j erhalten wird,

(b) von der j-ten Spalte der normierten Messwertmatrix M_{ij}^0 Abziehen des zugehörigen Drehtischfehler-Teilungsfehlerwerts B_j , sodass eine Messgeräteilungsfehler-Matrix $\widetilde{M}_{i,j}$ erhalten wird,

(c) Berechnen der Messgerät-Teilungsfehler C_i aus der Messgeräteilungsfehler-Matrix $\widetilde{M}_{i,j}$ gemäß

$$C_i = \begin{cases} \frac{1}{R+1} \left(\bar{M}_{i+R,R} + \sum_{\lambda=0}^{R-1} \bar{M}_{i+\lambda S, \lambda S} \right) & \text{für } J = 0, \\ \frac{1}{2R+1} \left(\bar{M}_{i+R-1, R-1} + \bar{M}_{i+R, R} + \sum_{\lambda=1}^{R-1} \bar{M}_{i+\lambda S-1, \lambda S-1} + \sum_{\lambda=0}^{R-1} \bar{M}_{i+\lambda S, \lambda S} \right) & \text{für } J \neq 0 \text{ \& } S-1 \neq R \\ \frac{1}{2R} \left(\bar{M}_{i+R, R} + \sum_{\lambda=1}^{R-1} \bar{M}_{i+\lambda S-1, \lambda S-1} + \sum_{\lambda=0}^{R-1} \bar{M}_{i+\lambda S, \lambda S} \right) & \text{für } J \neq 0 \text{ \& } S-1 = R \end{cases}$$

wobei alle Indices als Indices modulo N zu verstehen sind.

5. Messvorrichtung zum Messen der Kreisteilungsfehler von Flanken (12) eines Werkstücks (14) einer Kreisteilung mit Teilungszahl N, die

(a) einen Drehtisch (16), der in N äquidistante Winkelpositionen teilbar ist, zum Aufnehmen des Werkstücks (14),

(b) eine Teilungsabweichungs-Messvorrichtung (18) zum Messen der Teilungsabweichung aller Kreisteilungen in vorgegebenen Drehtischwinkelpositionen des Drehtischs (16) und

(c) eine Auswertevorrichtung (20) aufweist, **dadurch gekennzeichnet**, dass

(d) die Auswertevorrichtung (20) eingerichtet ist zum automatischen Durchführen eines Verfahrens mit den Schritten:

(i) Messen der Teilungsabweichung aller Kreisteilungen in vorgegebenen Drehtischwinkelpositionen des Drehtischs (16), wobei die Teilungsabweichung die Differenz zwischen der gemessenen Ist-Position der Flanke und der bei idealer Kreisteilung zu erwartenden Soll-Position ist,

(ii) wobei die Teilungsabweichungen zumindest an den Drehtischwinkelpositionen $\{0, R, \lambda \cdot S$ für alle λ mit $1 \leq \lambda \leq R-1$ gemessen werden, mit

$1 < R < S$,

$N = R \cdot S$ und wobei

R und S teilerfremd sind, und

die Koordinaten an weniger als N und zumindest (R+1) Drehtischwinkelpositionen gemessen werden,

und

(iii) Berechnen der Kreisteilungsfehler aus den Teilungsabweichung und den Drehtischwinkelpositionen gemäß einem Verfahren nach einem der Ansprüche 1 bis 4.

Es folgen 4 Seiten Zeichnungen

Anhängende Zeichnungen

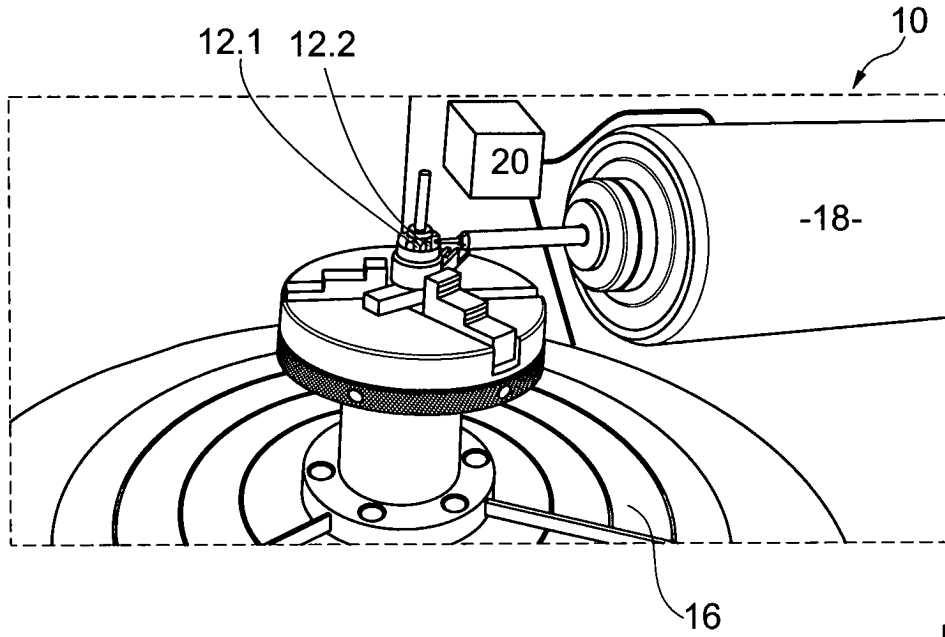


Fig.1

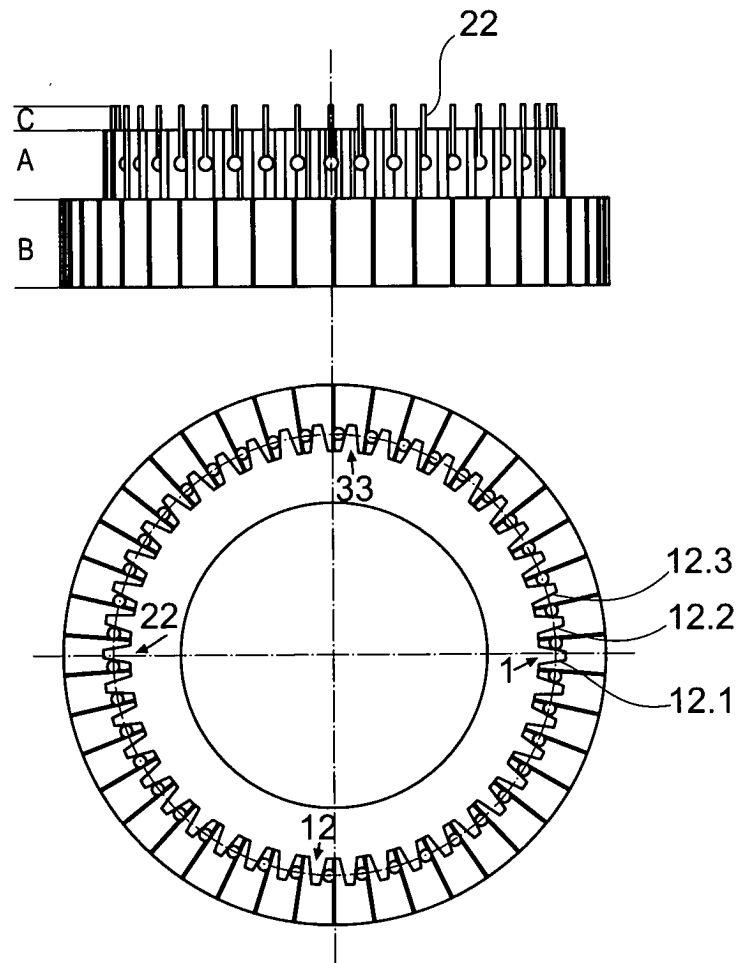
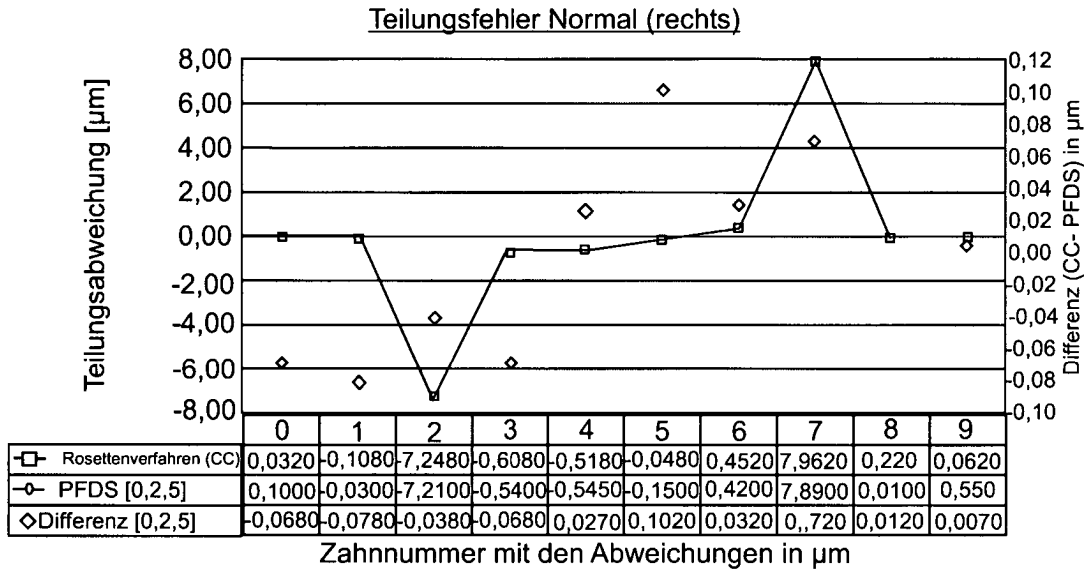
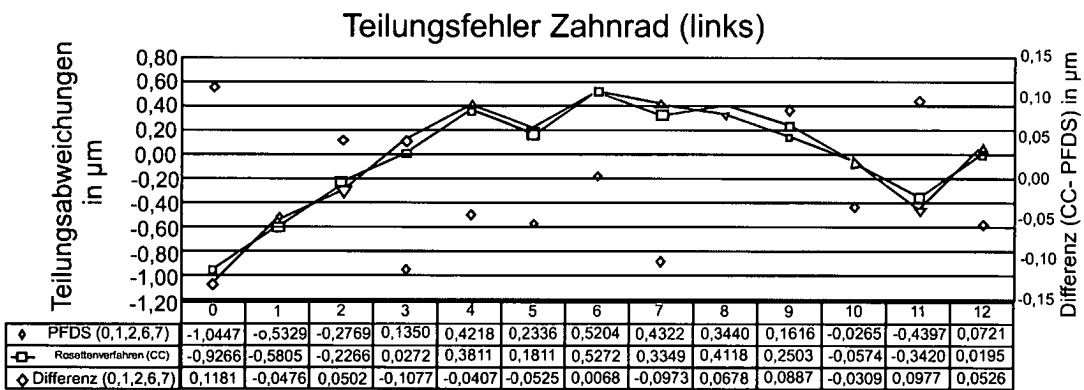


Fig.2



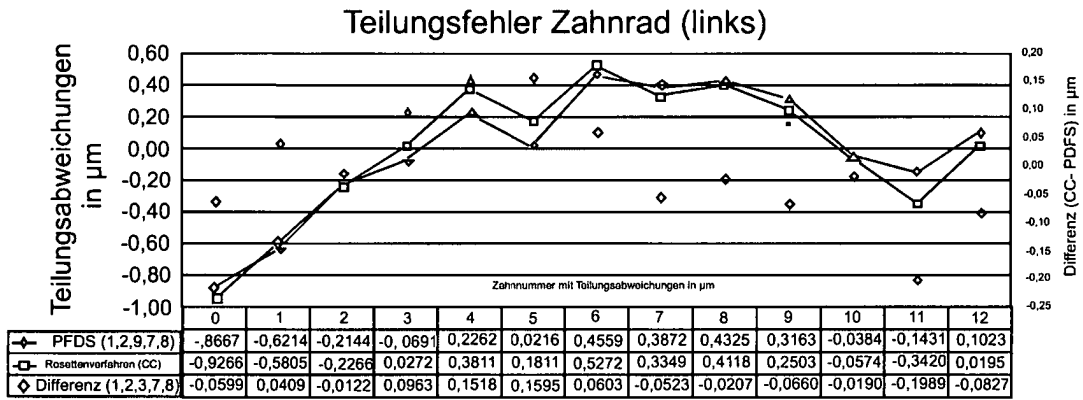
Auf den Drehtischpositionen (0,2,5) beruhende PFDS-Auswertung im Vergleich zur Rosettenauswertung (N= 10, R= 2, S= 5)

Fig. 3



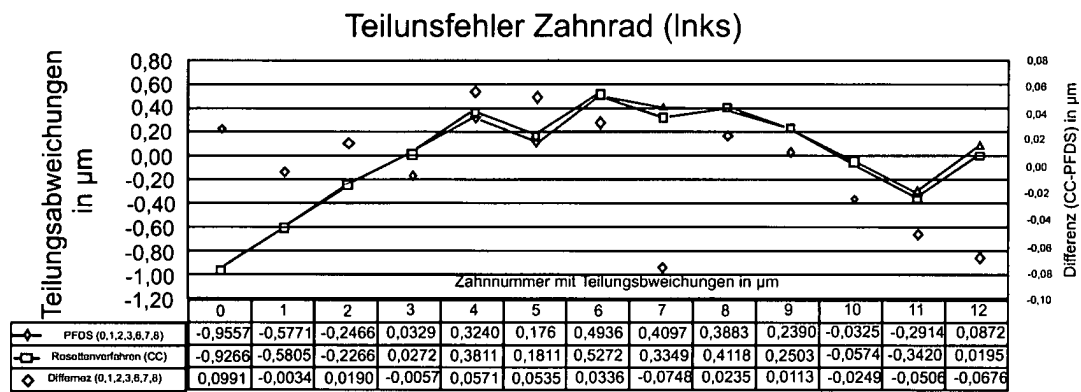
Eine auf dem Drehtischtupel [0,1,2,6,7] beruhende PFDS-Auswertung im Vergleich zur Rosettenauswertung (N'= N + J= 13 + 1= 14, R=2, S=5)

Fig. 4



Eine auf dem Drehtischtupel (1,2,3,7,8) beruhende PFDS-Auswertung im Vergleich zur Rosettenauswertung ($N' = N + J = 13 + 1 = 14$, $R = 2$, $S = 5$)

Fig. 5



Eine auf dem Drehtischtupel (0,1,2,3,6,7,8) beruhende PFDS-Auswertung im Vergleich zur Rosettenauswertung ($N' = N + J = 13 + 1 = 14$, $R = 2$, $S = 5$)

Fig. 6

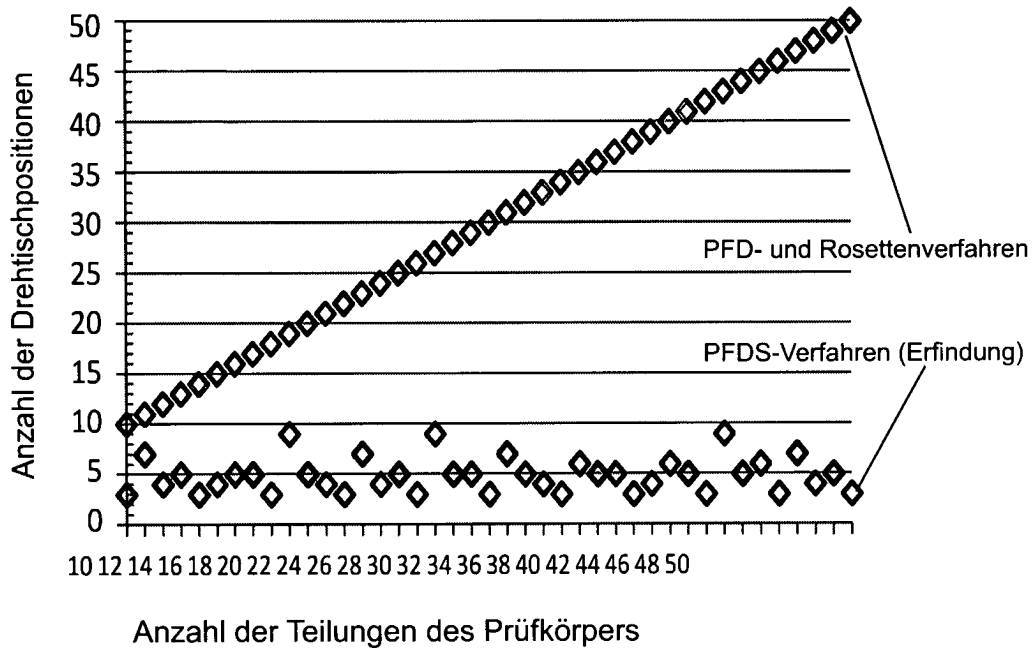


Fig. 7

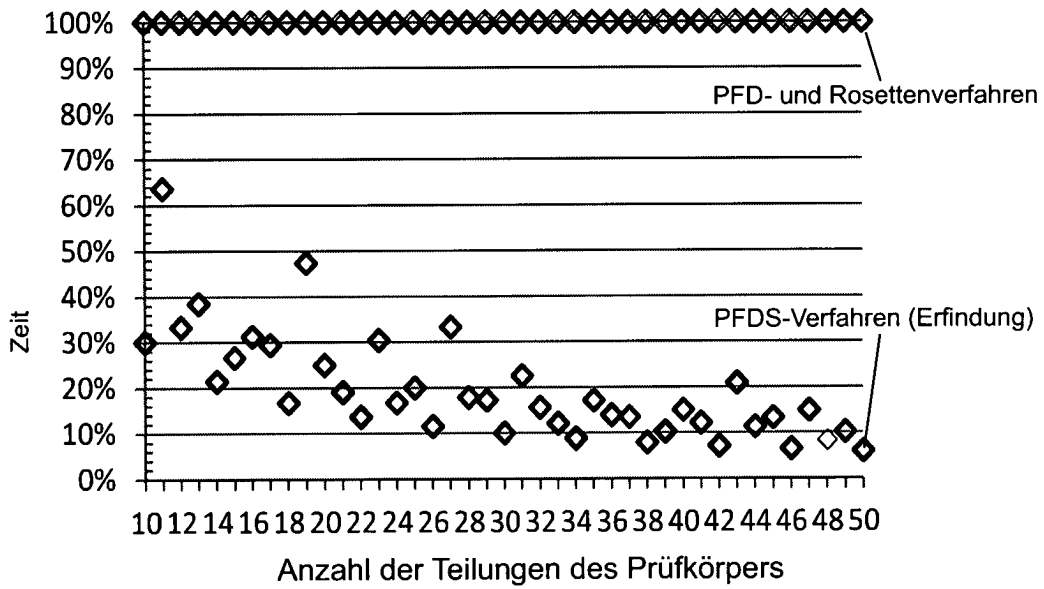


Fig.8