Quantenoptik

Übungsserie 4

Sommersemester 20 — **Andrey Surzhykov**
Abgabe am 17.06.2020 — **Jonas Sommerfeldt**

Aufgabe 1 *(Klassischer Hamiltonian des EM Feldes)* (3 Punkte)

Gehen Sie von der Lagrangedichte für das klassische freie elektromagnetische Feld

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

as, wobei

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ .$$

(a) Berechnen Sie den konjugierten Impuls zu A_μ.

(b) Zeigen Sie, dass für die Hamiltonfunktion in Coulomb-Eichung gilt

$$H = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 x \ \left[\epsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{\mu_0} |B|^2 \right] \ .$$

Aufgabe 2 *(Kanonische Transformation)* (3 Punkte)

Wir wissen, dass die freie Feldgleichung für das Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ von ebenen Wellen mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}$ gelöst wird. Das heißt wir können ein beliebiges Vektorpotential in ebenen Wellen entwickeln. Eine mögliche Entwicklung lautet:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}(t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{a}^*_{\boldsymbol{k}}(t) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right)$$

(a) Berechnen Sie das zu dieser Entwicklung gehörige $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Feld.

(b) Mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus (a) berechnen Sie die Hamiltonfunktion des freien elektromagnetischen Feldes. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators, was fällt Ihnen auf?

Hinweis: Bedenken Sie, dass $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}(t) = \boldsymbol{a}^*_{-\boldsymbol{k}}(t)$

Aufgabe 3 *(Fockzustände)* (3 Punkte)

Berechnen Sie für einen Fockzustand $|n\rangle$ die Varianz

(a) des Teilchenzahloperators $\hat{n}$.

(b) des Operators $F = C\hat{a} + C^*\hat{a}^\dagger$, der den Anteil einer einzelnen Mode zum elektromagnetischen Feldoperator angibt.