Quantenoptik

Übungsserie 2

Sommersemester 20 — **Andrey Surzhykov**
Abgabe am 13.05.2020 — **Jonas Sommerfeldt**

Aufgabe 1 *(Heisenberggleichung und Dipolnäherung)* (2 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Dipolübergang proportional is zu

$$W_{fi} = |\langle f|e\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla|i\rangle|^2 .$$

Zeigen Sie, dass $\langle f|e\nabla|i\rangle$ tatsächlich proportional zum Matrixelement des Dipoloperators $\langle f|e\boldsymbol{r}|i\rangle$ ist.

Aufgabe 2 *(Auswahlregeln)* (3 Punkte)

Leiten Sie die Auswahlregeln für einen Dipolübergang in einem Wasserstoffatom her. Gehen Sie davon aus, dass sich das Atom vor dem Übergang in seinem $1s$-Grundzustand befindet. Wechseln Sie hierzu in die Basis der sphärischen Komponenten für den Dipoloperator $(x, y, z) \rightarrow (r_{-1}, r_0, r_1)$ und somit:

$$\begin{aligned} r_{-1} &= r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1-1}(\theta, \phi) & \varepsilon_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_x - i\varepsilon_y) \\ r_0 &= r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}(\theta, \phi) & \varepsilon_0 &= \varepsilon_z \\ r_1 &= r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{11}(\theta, \phi) & \varepsilon_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_x + i\varepsilon_y) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 *(Klassischer harmonischer Oszillator)* (3 Punkte)

Wir beginnen mit der Hamiltonfunktion des klassischen harmonischen Oszillators in einer Dimension mit Masse m und Frequenz ω:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

(a) Wenden Sie auf diese Funktion nun die folgende kanonische Transformation an:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^* + a) \\ p &= \frac{m\omega}{\sqrt{2}}(a^* - a) \end{aligned}$$

Wie sieht die Hamiltonfunktion nun aus? Was fällt Ihnen auf? Welche Dimension haben die a und a^*?

(b) Berechnen sie die Poisson-Klammer $\{a^*, a\}$.

Aufgabe 4 *(Quantenmechanischer harmonischer Oszillator)* (2 Punkte)

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des quantenmechanischen harmonischen Oszillators sind gegeben als:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$
$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

Verifizieren Sie für die Erwartungswerte der kinetischen und potentiellen Energie in den Energieeigenzuständen des harmischen Oszillators das quantenmechanische Virialtheorem

$$\langle n|T|n\rangle = \langle n|V|n\rangle \ .$$