Quantenoptik

Übungsserie 2

Sommersemester 19 **Andrey Surzhykov**
Abgabe am 29.04.2019 **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Heisenberggleichung und Dipolnäherung)* (2 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Dipolübergang proportional is zu

$$W_{fi} = |\langle f|e\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla|i\rangle|^2 \,.$$

Zeigen Sie, dass $\langle f|e\nabla|i\rangle$ tatsächlich proportional zum Matrixelement des Dipoloperators $\langle f|e\boldsymbol{r}|i\rangle$ ist.

Aufgabe 2 *(Auswahlregeln)* (2 Punkte)

Leiten Sie die Auswahlregeln für einen Dipolübergang in einem Wasserstoffatom her. Gehen Sie davon aus, dass sich das Atom vor dem Übergang in seinem $1s$-Grundzustand befindet. Wechseln Sie hierzu in die Basis der sphärischen Komponenten für den Dipoloperator $(x, y, z) \to (r_{-1}, r_0, r_1)$ und somit:

$$\begin{aligned}
r_{-1} &= r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1-1}(\theta,\phi) & \varepsilon_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_x - i\varepsilon_y)\\
r_0 &= r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}(\theta,\phi) & \varepsilon_0 &= \varepsilon_z\\
r_1 &= r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{11}(\theta,\phi) & \varepsilon_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_x + i\varepsilon_y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 *(Klassischer harmonischer Oszillator)* (3 Punkte)

Wir beginnen mit der Hamiltonfunktion des klassischen harmonischen Oszillators in einer Dimension mit Masse m und Frequenz ω:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

(a) Wenden Sie auf diese Funktion nun die folgende kanonische Transformation an:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^* + a)\\
p &= \frac{m\omega}{\sqrt{2}}(a^* - a)
\end{aligned}$$

Wie sieht die Hamiltonfunktion nun aus? Was fällt Ihnen auf? Welche Dimension haben die a und a^*?

(b) Berechnen sie die Poisson-Klammer $\{a^*, a\}$.

Aufgabe 4 *(Kanonische Transformation)* (3 Punkte)

Wir wissen, dass die freie Feldgleichung für das Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ von ebenen Wellen mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}$ gelöst wird. Das heißt wir können ein beliebiges Vektorpotential in ebenen Wellen entwickeln. Eine mögliche Entwicklung lautet:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}(t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{a}^*_{\boldsymbol{k}}(t) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right)$$

(a) Berechnen Sie das zu dieser Entwicklung gehörige $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Feld.

(b) Mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus (a) berechnen Sie die Hamiltonfunktion des freien elektromagnetischen Feldes. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators, was fällt Ihnen auf?

Hinweis: Bedenken Sie, dass $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}(t) = \boldsymbol{a}^*_{-\boldsymbol{k}}(t)$