Relativistische Atomphysik

Übungsserie 6

Wintersemester 18/19 **Andrey Surzhykov**
Besprechung am 14.01.2018 **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Relativistische Compton Streuung)*

a) Zeichnen Sie die Feynman-Diagramme der Compton-Streuung und nutzen Sie die Feynman-Regeln um die zugehörigen Matrixelemente aufzuschreiben.

b) Nutzen Sie Energie- und Impulserhaltung, um die Wellenlängen-Änderung der Photons nach der Streuung in Abhängigkeit vom Streuwinkel auszudrücken. Dabei kann das Elektron vor dem Stoß als Ruhend angenommen werden (Ruheenergie mc^2) und besitzt nach dem Stoß eine relativistische Gesamtenergie und Impuls.

Aufgabe 2 *(Näherungsverfahren - Ein Vergleich)*
Betrachten Sie zwei identische Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einem eindimensionalen harmonischen Potential, die mittels eines weiteren harmonischen Potentials miteinander wechselwirken:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\hat{p}_i^2 + \hat{x}_i^2\right) + \frac{\lambda}{2}(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2,$$

wobei wir der Übersichtlichkeit halber ausnahmsweise annehmen wollen, dass $\hbar = m = \omega = 1$.

a) Entkoppeln Sie die beiden Oszillatoren mir Hilfe der Schwerpunktskoordinaten $R = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$ und $r = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$.

b) Bestimmen Sie die Grundzustandsenergie E_0 und die entsprechende Wellenfunktion $\psi_0(x_1, x_2)$ einschließlich des Spin-Anteils.

c) Zum Vergleich wollen wir dasselbe Problem nun mit der Hartree-Fock Methode lösen. Wählen Sie hierfür als Ansatz die Slater-Determinante $\psi_{SD}(x_1, x_2) = \phi(x_1)\phi(x_2)\chi$. Welche Form hat χ für den Grundzustand? Zeigen Sie durch Variation des Energieerwartungswerts $E_{HF}[\phi] = \langle\psi_{SD}|H|\psi_{SD}\rangle$, dass sich die Hartree-Fock-Gleichungen reduzieren lassen auf:

$$\left(-\partial_x^2 + x^2 + \lambda\int dy(x-y)^2|\phi(y)|^2\right)\phi(x) = \varepsilon\phi(x)$$

d) Lösen Sie diese Gleichung durch iterative Näherungen: Starten Sie in der ersten Näherung mit der normierten Grundzustandswellenfunktion $\phi^{(1)}(x)$ für $\lambda = 0$. Berechnen Sie damit obiges Integral und lösen Sie die resultierende lineare Gleichung

$$\left(-\partial_x^2 + x^2 + \lambda \int dy (x-y)^2 |\phi^{(n-1)}(y)|^2\right) \phi^{(n)}(x) = \varepsilon^{(n)} \phi^{(n)}(x)$$

für die zweite Approximation $\phi^{(2)}$. Fahren Sie mit der nächsten Iteration in gleicher Weise fort, bis die Iteration konvergiert. Wie lautet das Resultat für ψ^{∞} und $\varepsilon^{(\infty)}$?

e) Berechnen Sie die entsprechende Hartree-Fock-Energie E_{HF} und vergleichen Sie diese mit dem exakten Resultat aus Aufgabe b).

f) Berechnen Sie den Überlapp $|\langle\psi_{SD}|\psi_0\rangle|^2$ der exakten und der Hartree-Fock-Wellenfunktion. Was geschieht für $\lambda \to \infty$?