Relativistische Atomphysik

Übungsserie 5

Wintersemester 18/19 — **Andrey Surzhykov**
Besprechung am 17.12.2018 — **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Der Feldstärketensor)*
Um eine konsistente gemeinsame Theorie für Photonen und Elektronen aufzuschreiben, müssen wir die bereits bekannten Gesetze und Eigenschaften der Elektrodynamik in eine relativistische Form gießen. Ein dafür nützliches Objekt haben wir mit dem relativistischen Vektorpotential $A^\mu = (\phi/c, \boldsymbol{A})$ bereits kennen gelernt. Außerdem wissen wir, dass wir aus Ableitungen des Vektorpotentials das elektrische und magnetische Feld erhalten können. Diese Eigenschaft lässt sich in Form des Feldstärketensors

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

zusammenfassen.

(a) Eine wichtige Eigenschaft der elektrischen und magnetischen Felder ist, dass sie unabhängig von der Eichung des Vektorpotentials $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$ sind. Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor ebenfalls eichinvariant ist.

(b) Die relativistische Stromdichte setzt sich aus der Ladungsdichte ρ und dem elektrischen Strom $\boldsymbol{j}$ zusammen:

$$j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j}).$$

Zeigen Sie, dass der Zusammenhang

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

den inhomogenen Maxwellgleichungen für die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ entspricht.

(c) Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor die Bianchi-Identität

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$$

erfüllt und dass diese den homogenen Maxwellgleichungen für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ entspricht.

(d) Zeigen Sie, dass

$$-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right)$$

gilt, und somit $-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ dem Lagrangian (oder: der Lagrangedichte) des freien Photonenfeldes entspricht.