

Übungsserie 3

Wintersemester 18/19
Besprechung am 19.11.2018

Andrey Surzhykov
Robert Müller

Aufgabe 1 (*Ein paar Erwartungswerte*)

- (a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators \hat{r}^{-1} für einen s -Zustand, also $\langle n00|\hat{r}^{-1}|n00\rangle$, um den Erwartungswert für die potentielle Energie in einem Coulomb-Potential zu erhalten.
- (b) Nutzen Sie das Virialtheorem, um zu zeigen, dass Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil (a) für alle Zustände Gültigkeit hat.
- (c) Verifizieren Sie weiterhin am Beispiel eines $1s$ - und eines $2p$ -Zustands die Zusammenhänge

$$\langle \hat{r}^{-2} \rangle_{nlm} = \left(\frac{Z}{a_m n} \right)^2 \frac{1}{n(l + \frac{1}{2})},$$

$$\langle \hat{r}^{-3} \rangle_{nlm} = \left(\frac{Z}{a_m n} \right)^3 \frac{1}{(l + 1)(l + \frac{1}{2})},$$

wobei

$$a_m = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}.$$

Aufgabe 2 (*Darwin-Term die Zweite*)

Die Zitterbewegung von Elektronen kann als Interferenz zwischen den Lösungen negativer positiver Energie der Diracgleichung interpretiert werden. Diese Bewegung führt zu einer mittleren, isotropen Delokalisierung des Elektrons von $|\delta\mathbf{r}| \approx \frac{\hbar}{mc}$. Berechnen Sie die erste nicht verschwindende Korrektur, die durch diese Verschiebung verurstacht wird, indem Sie den Mittelwert des Potentials $\overline{V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})}$ um \mathbf{r} entwickeln.

Aufgabe 3 (*Relativistische Energiekorrektur*)

Eine Fingerübung. Leiten Sie aus den in der Vorlesung angegebenen Korrekturen ΔE_1 , ΔE_2 und ΔE_3 die relativistische Energiekorrektur

$$\Delta E_{rel} = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 = E_n \left(\frac{Z\alpha}{n} \right)^2 \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right),$$

ab, aus welcher die Feinstrukturaufspaltung resultiert. Für welche Quantenzahlen n und j wird diese Korrektur am größten?