Relativistische Atomphysik

Übungsserie 2

Wintersemester 18/19 **Andrey Surzhykov**
Besprechung am 05.11.2018 **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Eichtransformationen)*

(a) Zeigen Sie, dass sich die Felder $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ und $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ unter den Eichtransformationen

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) - \nabla f(\boldsymbol{r}, t)$$
$$\phi'(\boldsymbol{r}, t) = \phi(\boldsymbol{r}, t) - \partial_t f(\boldsymbol{r}, t)$$

nicht ändern. Wie sehen die zugehörigen Transformationsvorschriften für diese Felder aus?

(b) Zeigen Sie außerdem, dass auch die Diracgleichung eichinvariant ist, wenn der Dirac-Spinor wiefolgt transformiert:

$$\psi'(\boldsymbol{r}, t) = e^{i\frac{e}{\hbar}f(\boldsymbol{r},t)}\psi(\boldsymbol{r}, t).$$

Aufgabe 2 *(Drehungen und Paulimatrizen)*

(a) Beweisen Sie den in der Vorlesung angegebenen Zusammenhang

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$$

(b) Zeigen Sie, dass Drehungen um einen Winkel θ in der $SU(2)$ einer Drehung um 2θ in der $SO(3)$ entsprechen, dass also gilt:

$$\hat{u}^\dagger(\theta)\,(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\sigma})\,\hat{u}(\theta) = \left[\hat{R}_z(2\theta) \cdot \boldsymbol{r}\right] \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Es genügt, wenn Sie beispielhaft eine Drehung um die z-Achse annehmen, dass also gilt:

$$\hat{u}(\theta) = e^{i\sigma_z\theta}$$
$$\hat{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 *(Darwinterm)*

Die relativistische Korrektur der Ordnung $1/c^2$ zur Schrödingergleichung enthält unter anderem den sogenannten Darwinterm:

$$\hat{h}_{Darwin} = -\frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{dV(\hat{\boldsymbol{r}})}{dr}\frac{\partial}{\partial r}$$

(a) Dieser Term allerdings birgt ein Problem: Er ist nicht hermitesch. Zeigen Sie warum.

(b) Wir können diesen Fehler, gewissermaßen, beheben, indem wir den Darwin-Hamiltonian symmetrisieren

$$\hat{H}_{Darwin} = \frac{1}{2}\left(\hat{h}_{Darwin} + \hat{h}^{\dagger}_{Darwin}\right)$$

Zeigen Sie, dass diese Superposition für ein Coulombpotential der Ladungsdichte

$$\hat{H}_{Darwin} = \frac{\pi\hbar^2}{2m^2c^2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\delta(\boldsymbol{r}).$$

entspricht.