Quantenmechanik II

Übungsserie 8

Wintersemester 19/20 — **Andrey Surzhykov**
Abgabe am 16.12.2019 — **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Besselfunktionen nullter Ordnung)* (3 Punkte)

Lösen Sie die Bessel'sche Differentialgleichung

$$f_l''(x) + \frac{2}{x} f_l'(x) + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right] f_l(x) = 0$$

für $l = 0$. Nutzen Sie hierzu den Potenzreihenansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und wählen Sie entsprechende Anfangsbedingungen, um einen Ausdruck für die sphärische Besselfunktionen erster und zweiter Art, $j_0(x)$ und $y_0(x)$, zu finden.

Aufgabe 2 *(Asymptotik sphärischer Besselfunktionen)* (2 Punkte)

Berechnen Sie das asymptotische Verhalten der sphärischen Bessel-Funktion erster und zweiter Art [$j_l(r)$ und $n_l(r)$] für $r \gg 1$, sowie $r \in \mathbb{R}$ und $l \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Die Reihendarstellung der sphärischen Hankel-Funktion erster Art:

$$h_l^{(1)}(r) = (-i)^{l+1} \frac{e^{ir}}{r} \sum_{k=0}^{l} \frac{i^k (l+k)!}{k!(l-k)!} \frac{1}{(2r)^k}$$

könnte sich hierbei als hilfreich erweisen.

Aufgabe 3 *(Asymptotik ebener Wellen)* (2 Punkte)

Nutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 1, um zu zeigen, dass sich eine ebene Welle asymptotisch als unendliche Summe über ein- und auslaufende Kugelwellen schreiben lässt.

Aufgabe 4 *(Partialwellenzerlegung der Green'schen Funktion)* (3 Punkte)

Die Green'sche Funktion der freien Propagation

$$G_0^{(+)}(E, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

lässt sich in Partialwellen zerlegen, sodass

$$G_0^{(+)}(E, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi').$$

Nutzen Sie nun Ihre Erkenntnisse aus Übungsserie 6, Aufgabe 3, um eine Differentialgleichung für $g_l(r, r')$ zu finden. Äußern Sie eine Vermutung über mögliche Lösungen dieser Gleichung.