Quantenmechanik II

Übungsserie 4

Wintersemester 19/20 **Andrey Surzhykov**
Abgabe am 18.11.2019 **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Symmetrieeigenschaften der Clebsch-Gordan Koeffizienten)* (3 Punkte)

Racah fand die folgende explizite Form der Clebsch-Gordan Koeffizienten

$$(j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) = \delta_{M,m1+m2} \left[(2J+1) \frac{(j_1+j_2-J)!(J+j_1-j_2)!(J+j_2-j_1)!}{(j_1+j_2+J+1)!} \right.$$
$$\left. \times (j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(J+M)!(J-M)! \right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \sum_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \left[(j_1+j_2-J-\nu)!(j_1-m_1-\nu)!(j_2+m_2-\nu)! \right.$$
$$\left. \times \, (J-j_2+m_1+\nu)!(J-j_1-m_2+\nu)! \right]^{-1},$$

wobei der Index ν alle Werte annimmt, für die keine der Fakultäten negativ wird. Nutzen Sie diese Gleichung, um die in der Vorlesung angegebenen Symmetrierelationen für Clebsch-Gordan Koeffizienten zu zeigen.

Aufgabe 2 *(Kopplung von Drehimpulsen die Zweite)* (1 Punkt)

Zwei Teilchen mit Drehimpuls $j_1 = 1$ und $j_2 = 2$ seien in einem Zustand mit Drehimpulsprojektion null ($m_1 = m_2 = 0$) präpariert. Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls ($\boldsymbol{J} = \boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2$) des Systems nicht $J = 2$ sein kann.

Aufgabe 3 *(Landau-Yang Theorem)* (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Vektorteilchen ($J = 1$) nicht in zwei Photonen zerfallen kann.

Hinweis: Betrachten Sie Gesamtdrehimpuls und Symmetrie möglicher Zweiphotonenzustände.

Aufgabe 4 *(Drehungen und Paulimatrizen)* (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass Drehungen um einen Winkel θ in der $SU(2)$ einer Drehung um 2θ in der $SO(3)$ entsprechen, dass also gilt:

$$\hat{u}^\dagger(\theta) \, (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, \hat{u}(\theta) = \left[\hat{R}_z(2\theta) \cdot \boldsymbol{r} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Es genügt, wenn Sie beispielhaft eine Drehung um die z-Achse annehmen, dass also gilt:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\theta) &= e^{i\sigma_z\theta} \\ \hat{R}_z(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$