Quantenmechanik II

Übungsserie 3

Wintersemester 19/20 **Andrey Surzhykov**
Abgabe am 11.11.2019 **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Pauli Matrizen)* (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Pauli Matritzen zusammen mit $\mathbb{1}_2$ eine Basis für den Raum aller hermiteschen 2×2 Matrizen bilden.

(b) Nutzen Sie die explizite Form der Pauli Matrizen, um zu zeigen, dass die Spinoperatoren

$$\hat{s}_i = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i \qquad i \in \{1, 2, 3\}$$

Drehimpulsoperatoren sind.

(c) Konstruieren Sie einen Zustand $|+\rangle_x$ mit Spinprojektion $+\frac{1}{2}$ auf die x-Achse und geben Sie das Ergebnis in der Basis

$$|+\rangle_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an, wobei $|+\rangle_z$ und $|-\rangle_z$ Eigenfunktionen zu $\hat{s}_z$ sind.

Aufgabe 2 *(Kopplung von Drehimpulsen)* (2 Punkte)

(a) Seien $\hat{\boldsymbol{j}}_1$ und $\hat{\boldsymbol{j}}_2$ Drehimpulsoperatoren. Zeigen Sie, dass

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{j}}_1 + \hat{\boldsymbol{j}}_2$$

ebenfalls ein Drehimpulsoperator ist.

(b) Zeigen Sie die folgenden Kommutatorrelationen:

(i) $[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{\boldsymbol{j}}^2_{1,2}] = 0$

(ii) $[\hat{J}_z, \hat{\boldsymbol{j}}^2_{1,2}] = 0$

Aufgabe 3 *(Clebsch-Gordan Koeffizienten)* (2 Punkte)

Begründen Sie, welche der folgenden Clebsch-Gordan Koeffizienten null sind.

(a) $(1\,1\,1\,0|2\,2)$

(b) $(5\,0\,4\,0|1\,0)$

(c) $(\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\,1\,-1|\frac{7}{2}\,\frac{1}{2})$

(d) $(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}|1\,1)$

Aufgabe 4 *(Vektormodell von Drehimpulsen)* (3 Punkte)

Sei $\hat{\boldsymbol{j}}$ ein Drehimpulsoperator und $|jm\rangle$ ein Eigenvektor zu $\hat{\boldsymbol{j}}^2$ und $\hat{j}_z$. Zeigen Sie, *ohne* eine explizite Darstellung von $\hat{\boldsymbol{j}}$ zu verwenden, dass

(a) $\langle jm|\hat{j}_x|jm\rangle = 0$

(b) $\langle jm|\hat{j}_y|jm\rangle = 0$