Quantenmechanik II

Übungsserie 2

Wintersemester 19/20 **Andrey Surzhykov**
Abgabe am 04.11.2019 **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Hermitesche Operatoren)* (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass sich der Kommutator zweier hermitescher $\hat{A}$ und $\hat{B}$ Operatoren immer schreiben lässt als:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C},$$

wobei $\hat{C}$ ebenfalls hermitesch ist.

Aufgabe 2 *(Gemeinsame Eigenfunktionen)* (3 Punkte)

Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren mit diskretem Spektrum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

(b) $\hat{A}$ und $\hat{B}$ besitzen einen gemeinsamen Satz Eigenfunktionen.

Hinweis: Die Eigenwerte bezüglich $\hat{A}$ und $\hat{B}$ können voneinander verschieden sein.

Aufgabe 3 *(Drehimpuls in Kugelkoordinaten)* (3 Punkte)
Aus der Vorlesung kennen Sie bereits die explizite Darstellung der Komponenten $\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$ und $\hat{l}_z$ des Bahndrehimpulsoperators $\hat{\boldsymbol{l}}$ in kartesischen Koordinaten. Finden Sie nun eine explizite Form von $\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$ und $\hat{l}_z$ in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 4 *(Leiteroperatoren)* (3 Punkte)

Sei $\hat{\boldsymbol{j}} = (\hat{j}_x, \hat{j}_y, \hat{j}_z)$ ein Drehimpulsoperator mit den zugehörigen Leiteroperatoren $\hat{j}_\pm = \hat{j}_x \pm i\hat{j}_y$.

(a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{j}_+, \hat{j}_-]$, $[\hat{j}_z, \hat{j}_\pm]$ sowie $[\hat{\boldsymbol{j}}^2, \hat{j}_\pm]$

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\hat{j}_\pm \left| jm \right\rangle = c_\pm \left| jm \pm 1 \right\rangle .$$

Finden Sie einen Ausdruck für die Koeffizienten $c_\pm$.