Quantenmechanik II

Übungsserie 12

Wintersemester 19/20 **Andrey Surzhykov**
Abgabe am 27.01.2020 **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Kommutatorrelationen von Feldoperatoren)* (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung eingeführten Feldoperatoren die folgenden Kommutatorrelationen erfüllen:

$$\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{r}), \hat{\psi}(\boldsymbol{r'})\right]_{\pm} = 0,$$
$$\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{r}), \hat{\psi}^{\dagger}(\boldsymbol{r'})\right]_{\pm} = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}),$$

wobei $[.,.]_+$ den Antikommutator für den fermionischen und $[.,.]_-$ den Kommutator für den bosonischen Fall bezeichnet

Aufgabe 2 *(Potentielle Energie in zweiter Quantisierung)* (2 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie bereits die Kinetische Energie mithilfe der Feldoperatoren aufgeschrieben. Drücken Sie nun den Operator der potentiellen Energie (i.a. ein Operator der Form $\hat{V}(\boldsymbol{r})$ durch Feldoperatoren aus.

Aufgabe 3 *(Darwinterm)* (4 Punkte)

Die relativistische Korrektur der Ordnung $1/c^2$ zur Schrödingergleichung enthält unter anderem den sogenannten Darwinterm:

$$\hat{h}_{Darwin} = -\frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\frac{dV(\hat{r})}{dr}\frac{\partial}{\partial r}$$

(a) Dieser Term allerdings birgt ein Problem: Er ist nicht hermitesch. Zeigen Sie warum.

(b) Wir können diesen Fehler, gewissermaßen, beheben, indem wir den Darwin-Hamiltonian symmetrisieren

$$\hat{H}_{Darwin} = \frac{1}{2}\left(\hat{h}_{Darwin} + \hat{h}^{\dagger}_{Darwin}\right)$$

Zeigen Sie, dass diese Superposition für ein Coulombpotential der Ladungsdichte

$$\hat{H}_{Darwin} = \frac{\pi\hbar^2}{2m^2c^2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\delta(\hat{\boldsymbol{r}}).$$

entspricht.

Aufgabe 4 *(Darwin-Term die Zweite)* (2 Punkte)

Die Zitterbewegung von Elektronen kann als Interferenz zwischen den Lösungen negativer und positiver Energie der Diracgleichung interpretiert werden. Diese Bewegung führt zu einer mittleren, isotropen Delokalisierung des Elektrons von $|\delta \boldsymbol{r}| \approx \frac{\hbar}{mc}$. Berechnen Sie die erste nicht verschwindende Korrektur, die durch diese Verschiebung verursacht wird, indem Sie den Mittelwert des Potentials $\overline{V(\boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{r})}$ um $\boldsymbol{r}$ entwickeln.