Quantenmechanik II

Übungsserie 11

Wintersemester 19/20 | **Andrey Surzhykov**
Abgabe am 20.01.2020 | **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Dirac Hamiltonian)* (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Dirac Hamiltonian

$$\hat{H}_D = c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2$$

hermitesch ist.

Aufgabe 2 *(Spin und Bahndrehimpuls)* (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Dirac Hamiltonian nicht mit den z-Komponenten des Bahn- und Spindrehimpulsoperators $\hat{L}_z$ und $\hat{S}_z$ kommutiert, mit $\hat{J}_z = \hat{L}_z + \hat{S}_z$ aber schon.

Aufgabe 3 *(Freie Lösung der Diracgleichung)* (3 Punkte)

Spinoren transformieren unter Lorentztransformationen folgendermaßen:

$$\psi'(\boldsymbol{r}', t') = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}(1 + \delta\alpha_z)\psi(\boldsymbol{r}, t),$$

wobei $\gamma = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1}$ und $\delta = \sqrt{(1-\gamma)/(1+\gamma)}$.

Dies bedenkend, Lösen Sie die freie Diracgleichung

$$\left(c\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2\right)\psi(\boldsymbol{r}, t) = i\hbar\partial_t\psi(\boldsymbol{r}, t),$$

für ein Elektron mit Impuls $\boldsymbol{p} = (0, 0, p_z)$, indem Sie zunächst ein Elektron in Ruhe ($p = 0$) betrachten.

Aufgabe 4 *(Kovariante Formulierung der Diracgleichung)* (3 Punkte)

Die kovariante Formulierung der Diracgleichung lautet:

$$(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc^2)\psi(x) = 0$$

Ausgehend der Lorentztransformation der partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ und eines Spinors $\psi'(x') = S\psi(x)$, zeigen Sie, dass S die folgenden Relationen erfüllen muss, damit die Diracgleichung ihre Form durch Lorentztransformation nicht verändert:

$$\begin{aligned} S\gamma^\mu S^{-1}\Lambda^\nu{}_\mu &= \gamma^\nu, \\ S^{-1}\gamma^\mu S &= \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu. \end{aligned}$$