Quantenmechanik II

Übungsserie 1

Wintersemester 19/20 **Andrey Surzhykov**
Abgabe am 28.10.2019 **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Kommutatoren)* [3 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass für die Komponenten des Orts- und Impulsoperators x_i und p_j und deren Potenzen folgende Kommutatorrelationen gelten:

$$[\hat{x}_i, (\hat{p}_j)^n] = i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{p}_i} (\hat{p}_j)^n$$
$$[\hat{p}_i, (\hat{x}_j)^n] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} (\hat{x}_j)^n$$

(b) Nutzen Sie ihr Ergebnis aus (a) und die Erkenntnisse aus der Präsenzübung, um zu zeigen:

$$[\hat{x}_i, f(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}})] = i\hbar \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}})}{\partial \hat{p}_i}$$
$$[\hat{p}_i, f(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}})] = -i\hbar \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}})}{\partial \hat{x}_i}$$

Aufgabe 2 *(Baker-Campbell-Hausdorff Formel)* [2 Punkte]

Beweisen Sie für Orts- und Impulsoperator die Baker-Campbell-Hausdorff Formel:

$$e^{\hat{x}+\hat{p}} = e^{\hat{x}} e^{\hat{p}} e^{-[\hat{x},\hat{p}]/2}$$

Aufgabe 3 *(Der Quantenmechanische Harmonische Oszillator)* [2 Punkte]

Nutzen Sie die Unschärferelation $\langle \Delta x \rangle \langle \Delta p \rangle \geq \frac{\hbar}{2}$, um eine untere Schranke für die Energie des harmonischen Oszillators zu finden.

Aufgabe 4 *(Delta-Potential)* [3 Punkte]

Berechnen Sie die Bindungsenergien und die normierten Wellenfunktionen für die gebundenen Zustände, die die folgende Schrödingergleichung lösen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} - \lambda \delta(x) \psi(x) = E \psi(x)$$