

Übungsserie 1

Wintersemester 17/18
Abgabe am 26.10.2017

Andrey Surzhykov
Robert Müller

Aufgabe 1 (*Hermitesche Operatoren*) (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass sich der Kommutator zweier hermitescher \hat{A} und \hat{B} Operatoren immer schreiben lässt als:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C},$$

wobei \hat{C} ebenfalls hermitesch ist.

Aufgabe 2 (*Gemeinsame Eigenfunktionen*) (3 Punkte)

Seien \hat{A} und \hat{B} hermitesche Operatoren mit diskrettem Spektrum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$
- (b) \hat{A} und \hat{B} besitzen einen gemeinsamen Satz Eigenfunktionen.

Hinweis: Die Eigenwerte bezüglich \hat{A} und \hat{B} können voneinander verschieden sein.

Aufgabe 3 (*Drehimpuls in Kugelkoordinaten*) (3 Punkte)

- (a) Aus der Vorlesung kennen Sie bereits die explizite Darstellung der Komponenten \hat{l}_x , \hat{l}_y und \hat{l}_z des Bahndrehimpulsoperators $\hat{\mathbf{l}}$ in kartesischen Koordinaten. Finden Sie nun eine explizite Form von \hat{l}_x , \hat{l}_y und \hat{l}_z in Kugelkoordinaten.
- (b) Zeigen Sie, dass sich die Eigenfunktionen von \hat{l}_z allgemein schreiben lassen als:

$$\psi_m(\varphi) = ce^{im\varphi} \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4 (*Leiteroperatoren*) (3 Punkte)

Sei $\hat{\mathbf{j}} = (\hat{j}_x, \hat{j}_y, \hat{j}_z)$ ein Drehimpulsoperator mit den zugehörigen Leiteroperatoren $\hat{j}_\pm = \hat{j}_x \pm i\hat{j}_y$.

- (a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{j}_+, \hat{j}_-]$, $[\hat{j}_z, \hat{j}_\pm]$ sowie $[\hat{\mathbf{j}}^2, \hat{j}_\pm]$
- (b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\hat{j}_\pm |jm\rangle = c_\pm |jm \pm 1\rangle.$$

Finden Sie einen Ausdruck für die Koeffizienten c_\pm .