Quantenmechanik II

Präsenzübung

Wintersemester 17/18 **Andrey Surzhykov**
Keine Abgabe **Robert Müller**

Aufgabe 1 *(Kommutatoren)* Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Kommutators:

(a) $[\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}, \hat{C}] = \lambda[\hat{A}, \hat{C}] + \mu[\hat{B}, \hat{C}]$ *(Linearität)*

(b) $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0$ *(Jacobi-Identität)*

(c) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$ *(Produktregel)*

Aufgabe 2 *(Matrixdarstellung von Operatoren)*

(a) Bei den folgenden Matrizen handelt es sich um Operatoren in Matrixdarstellung. Kann es sich bei diesen um physikalische Observablen handeln? Wenn ja, um welche?
(Hinweis: Betrachten Sie die Kommutatorrelationen und Eigenwerte)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie eine möglichst einfache Matrixdarstellung des Hamiltonoperators:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

wobei $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ Leiteroperatoren sind mit der üblichen Wirkung

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,,$$
$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,$$

auf Eigenzustände $|n\rangle$ von $\hat{H}$. Welches System beschreibt $\hat{H}$?

Aufgabe 3 *[Elementares zum (Dirac-) Formalismus der QM]*

Sei $\hat{X}$ ein linearer Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\{\langle a|\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, so ist die Spur von $\hat{X}$ definiert durch:

$$\mathrm{tr}\hat{X} = \sum_a \langle a|\hat{X}|a\rangle$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $\mathrm{tr}\hat{X}$ ist unabhängig von der Wahl der Basis.

(b) $\mathrm{tr}\hat{X}^\dagger = (\mathrm{tr}\hat{X})^*$

(c) $\mathrm{tr}(\lambda\hat{X}) = \lambda\mathrm{tr}\hat{X}, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}$

(d) $\mathrm{tr}(\hat{X} + \hat{Y}) = \mathrm{tr}(\hat{Y} + \hat{X})$

(e) $\mathrm{tr}(\hat{X}\hat{Y}) = \mathrm{tr}(\hat{Y}\hat{X})$

(f) $\mathrm{tr}(|a\rangle\langle a'|) = \delta_{aa'}$

Aufgabe 4 *(Hellmann-Feynman Theorem)*

Betrachten Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}(\lambda)$ mit der zugehörigen Eigenwertschar $E(\lambda)$ und normierten Eigenvektoren $|\psi(\lambda)\rangle$. Zeigen Sie nun, dass gilt:

$$\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle\psi(\lambda)|\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda}|\psi(\lambda)\rangle$$