

QUANTENMECHANIK II

Präsenzübung

Wintersemester 16/17

Keine Abgabe

Andrey Surzhykov

Robert Müller

Aufgabe 1 (*Kommutatoren*) Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Kommutators:

(a) $[\lambda\hat{A} + \mu\hat{B}, \hat{C}] = \lambda[\hat{A}, \hat{C}] + \mu[\hat{B}, \hat{C}]$ (*Linearität*)

(b) $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0$ (*Jacobi-Identität*)

(c) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$ (*Produktregel*)

Aufgabe 2 (*Matrixdarstellung von Operatoren*)

- (a) Bei den folgenden Matrizen handelt es sich um Operatoren in Matrixdarstellung. Kann es sich bei diesen um physikalische Observablen handeln? Wenn ja, um welche?

(*Hinweis: Betrachten Sie die Kommutatorrelationen und Eigenwerte*)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

- (b) Bestimmen Sie eine möglichst einfache Matrixdarstellung des Hamiltonoperators:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right),$$

wobei \hat{a}^\dagger und \hat{a} Leiteroperatoren sind mit der üblichen Wirkung

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle,$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle,$$

auf Eigenzustände $|n\rangle$ von \hat{H} . Welches System beschreibt \hat{H} ?

Aufgabe 3 [*Elementares zum (Dirac-) Formalismus der QM*]

Sei \hat{X} ein linearer Operator auf einem Hilbertraum \mathcal{H} und $\{|a\rangle\}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} , so ist die Spur von \hat{X} definiert durch:

$$\text{tr} \hat{X} = \sum_a \langle a | \hat{X} | a \rangle$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $\text{tr}\hat{X}$ ist unabhängig von der Wahl der Basis.

(b) $\text{tr}\hat{X}^\dagger = (\text{tr}\hat{X})^*$

(c) $\text{tr}(\lambda\hat{X}) = \lambda\text{tr}\hat{X}$, mit $\lambda \in \mathbb{C}$

(d) $\text{tr}(\hat{X} + \hat{Y}) = \text{tr}(\hat{Y} + \hat{X})$

(e) $\text{tr}(\hat{X}\hat{Y}) = \text{tr}(\hat{Y}\hat{X})$

(f) $\text{tr}(|a\rangle\langle a'|) = \delta_{aa'}$

Aufgabe 4 (*Hellmann-Feynman Theorem*)

Betrachten Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}(\lambda)$ mit der zugehörigen Eigenwertschar $E(\lambda)$ und normierten Eigenvektoren $|\psi(\lambda)\rangle$. Zeigen Sie nun, dass gilt:

$$\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle \psi(\lambda) | \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} | \psi(\lambda) \rangle$$