Physikalisch-Technische Bundesanstalt
Braunschweig und Berlin
Nationales Metrologieinstitut

Der Erweiterungsfaktor *k*

Wahl des richtigen Faktors

S. Mieke, PTB-Berlin, 8.40

Inhalt:

1. Was macht der *k*-Faktor ?
2. Welche Parameter legen den Wert des *k*-Faktors fest ?
3. Wo tritt der *k*-Faktor auf ?
4. Zusammenhang *k*-Faktor und mögliche Messwertverteilungen
5. Zusammenfassung

Inhalt:

1. Was macht der *k*-Faktor ?
2. Welche Parameter legen den Wert des *k*-Faktors fest ?
3. Wo tritt der *k*-Faktor auf ?
4. Zusammenhang *k*-Faktor und mögliche Messwertverteilungen
5. Zusammenfassung

1. Was macht der *k*-Faktor ?

Im klassischen GUM (JCGM 100) verknüpft der *k*-Faktor(genauer: Erweiterungs-faktor k_p) die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ durch Multiplikation mit der erweiterten Messunsicherheit U:

$$\boxed{U = k_p \cdot u_c(y)}$$

Dadurch wird aus einer Größe, die die Streuung beschreibt ($u_c(y)$) eine Größe, die angibt, dass im Intervall y - U bis y + U mit einer Wahrscheinlichkeit von p (%) der wahre Wert des Messergebnisses liegt.

1. Was macht der *k*-Faktor ?

Standardmessunsicherheit	k_p →	**Erweiterte Messunsicherheit**
➢ Streuung = Wurzel(Varianz)		➢ Kennzeichnet ein Intervall
➢ Keine Aussage über Wahrscheinlichkeiten		➢ Abhängig von Verteilung und gewählter Wahrscheinlichkeit
➢ Fortpflanzung von Messunsicherheiten: direkt verwendbar		➢ Fortpflanzung von Messunsicherheiten: nicht direkt verwendbar

Quelle: G. Wübbeler, PTB

Inhalt:

1. Was macht der *k*-Faktor ?
2. Welche Parameter legen den Wert des *k*-Faktors fest ?
3. Wo tritt der *k*-Faktor auf ?
4. Zusammenhang *k*-Faktor und mögliche Messwertverteilungen
5. Zusammenfassung

2. Welche Parameter legen den Wert fest ?

Weil durch den *k*-Faktor eine Umrechnung erfolgt, hängt sein Wert ab von:

a. der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Messergebnisses

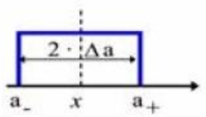
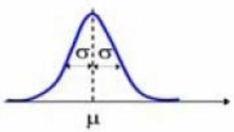
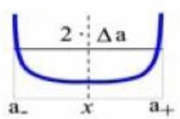
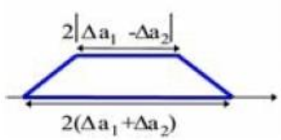
b. dem gewählten Grad des Vertrauens *p*

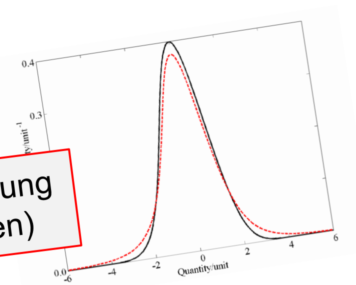
c. den effektiven Freiheitsgraden v_{eff}

2. Welche Parameter legen den Wert fest ?

a. Wahrscheinlichkeitsverteilung des Messergebnisses

Einschätzen der beteiligten Größen

Kenntnisse über die Größe	**Resultierende *PDF***		**Standardabweichung**	
Mögliche Werte sind in einem Intervall enthalten		gleichverteilt	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{3}}$	
Erwartungswert μ und Standardab-weichung σ		gaußförmig	$u_x = \sigma$	
Größe ist Funktion $X = \Delta a \cdot \sin\Phi$ Phasenwinkel Φ unbekannt		U-förmig	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{2}}$	
Größe ist Summe/ Differenz zweier Größen X_1, X_2; Kenntnisse entspr. rechteckförmigen *PDF*		trapezförmig	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{6}}\sqrt{1+\beta^2}$	**dreieckförmig ($\beta = 0$)** $u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{6}}$



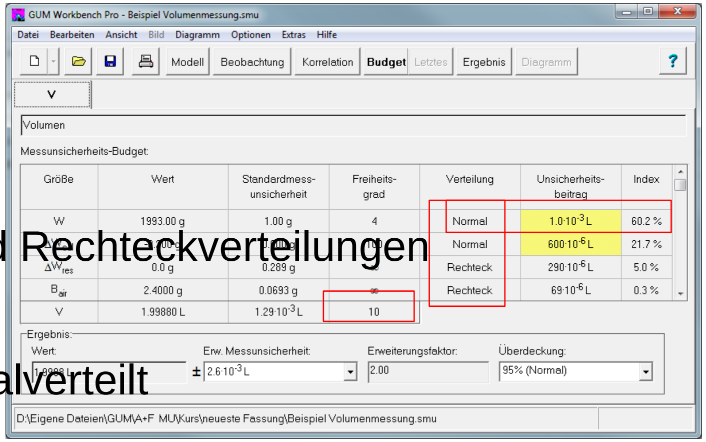
+ Student- oder t-Verteilung (abh. v. Freiheitsgraden)

PDF: probability density function, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

2. Welche Parameter legen den Wert fest ?

Wann kann man annehmen, dass eine Normalverteilung (Gauss-Verteilung) das Ergebnis richtig beschreibt?

GUM G.6.6 gibt folgende Empfehlungen:



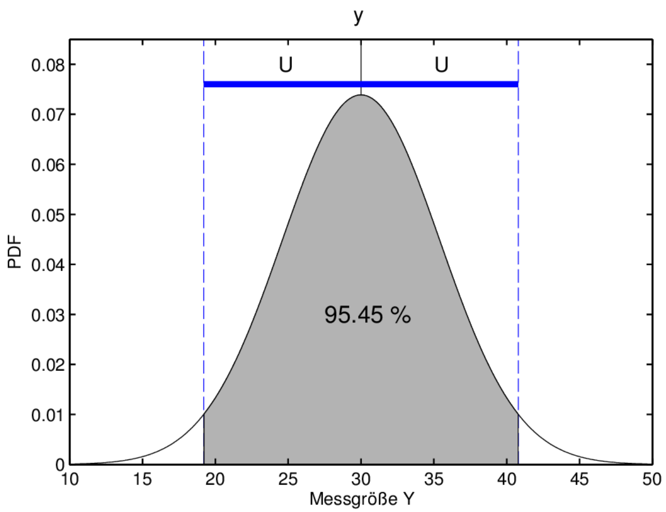
- die Eingangsgrößen X_i lassen sich durch Normal- und Rechteckverteilungen beschreiben,
- die dominierende Standardunsicherheit $u(x_i)$ ist normalverteilt (nicht in G.6.6 genannt),
- die Standardunsicherheiten $u(x_i)$ tragen mit vergleichbaren Anteilen zur kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y_i)$ bei,
- das Modell der Messung ist hinreichend linear,
- die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade ν_{eff} ist erheblich, z.B. > 10.

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

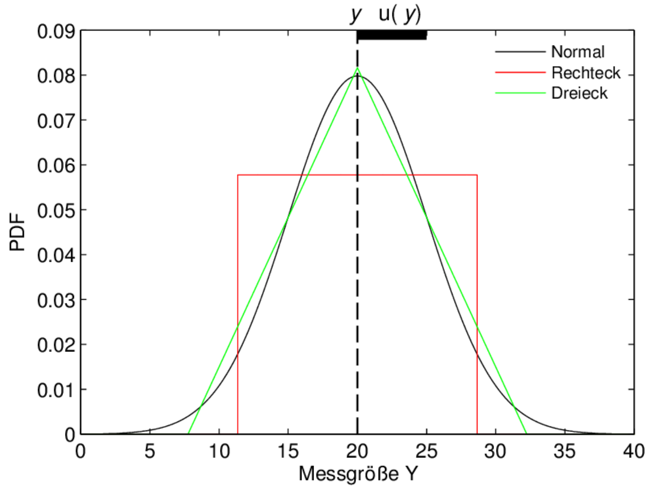
2. Welche Parameter legen den Wert fest ?

b. Grad des Vertrauens *p*

Normalverteilung:



Wahrscheinlichkeit *p* (in %)	Erweiterungsfaktor k_p
68,27	1,000
90,00	1,645
95,00	1,960
95,45	2,000
99,00	2,576
99,73	3,000



Wahrscheinlichkeit 95,45 %

Normal	$k_p = 2{,}0$
Rechteck	$k_p = 1{,}65$
Dreieck	$k_p = 1{,}93$

Grafiken: G. Wübbeler

2. Welche Parameter legen den Wert fest ?

c. effektive Freiheitsgrade ν_{eff}

Table G.2 — Value of $t_p(\nu)$ from the t-distribution for degrees of freedom ν that defines an interval $-t_p(\nu)$ to $+t_p(\nu)$ that encompasses the fraction p of the distribution

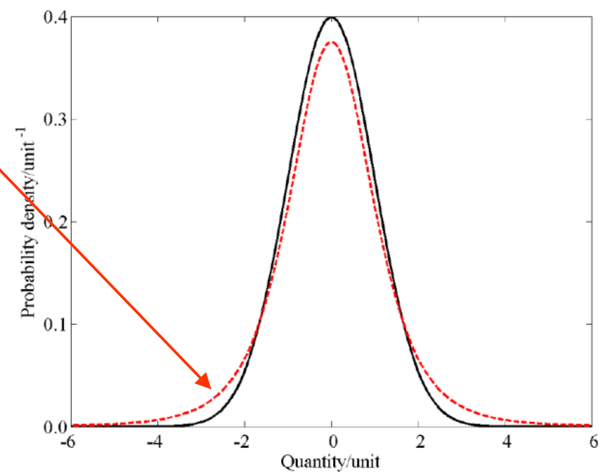
Degrees of freedom	Fraction p in percent					
ν	68,27 [a]	90	95	95,45 [a]	99	99,73 [a]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

a) For a quantity z described by a normal distribution with expectation μ_z and standard deviation σ, the interval $\mu_z \pm k\sigma$ encompasses p = 68,27 percent, 95,45 percent and 99,73 percent of the distribution for k = 1, 2 and 3, respectively.

GUM, Tabelle G.2

Student- oder t-Verteilung

Sie ist zu wählen bei wenigen Wieder-hohlungsmessungen n, weil dann ν_{eff} oft klein (< 10, besser: < 25) ist.



k-Faktoren der Normalverteilung

Inhalt:

3. Wo tritt der *k*-Faktor auf ?

Der k-Faktor tritt an 2 Stellen bei Messunsicherheitsbetrachtungen auf:

- bei der Berechnung der erweiterten Messunsicherheit *U*, ☑
- bei der Bestimmung der Standardmessunsicherheit $u(x_i)$ der verschiedenen Eingangsgrößen X_i.

Für die Fehlerfortpflanzung, der Berechnung der kombinierten Standardmess-unsicherheit $u_c(y)$ nach

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \cdot u^2(x_i)}$$

müssen die verfügbaren Informationen in Standardmessunsicherheit $u(x_i)$ der Eingangsgrößen X_i umgerechnet werden.

3. Wo tritt der *k*-Faktor auf ?

Hinweis:

Gemäß GUM erfolgt die Fehlerfortpflanzung nach

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \cdot u^2(x_i)}$$

<u>nicht</u> nach

$$\cancel{U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + \ldots}}$$

weil $U = k_p \cdot u_c(y)$ und <u>die *k*-Faktoren verschieden sein können</u>.

Inhalt:

1. Was macht der *k*-Faktor ?
2. Welche Parameter legen den Wert des *k*-Faktors fest ?
3. Wo tritt der *k*-Faktor auf ?
4. Zusammenhang *k*-Faktor und mögliche Messwertverteilungen
5. Zusammenfassung

4. Zusammenhang *k*-Faktor und Verteilungen

Zur Bestimmung der Standardmessunsicherheiten $u(x_i)$ sind 2 Schritte notwendig:

- Abschätzung der Verteilung für jede Eingangsgröße,
- Errechnung der Standardmessunsicherheiten $u(x_i)$ nach festen Regeln auf Grund der Verteilung.

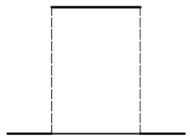
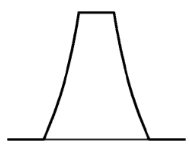
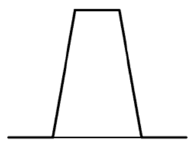
Auszug aus dem Qualitätsmanagement-Handbuch der PTB:

In Kalibrierscheinen und in Prüfberichten ... ist bei der Angabe der Messunsicherheit im Falle der Normalverteilung folgende Formulierung zu verwenden:

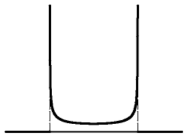
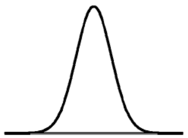
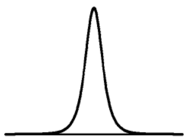
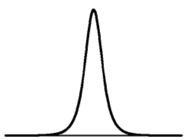
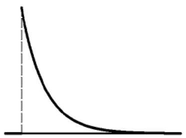
„Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmess-unsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ ergibt. Sie wurde gemäß dem „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)" ermittelt. Der Wert der Messgröße liegt dann im Regelfall mit einer Wahrschein-lichkeit von annähernd 95 % im zugeordneten Überdeckungsintervall."

4. Zusammenhang *k*-Faktor und Verteilungen

Tabelle 1 — Vorhandene Information und die auf der Grundlage dieser Information zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

verfügbare Information	zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Veranschaulichung (nicht maßstäblich)	Unterabschnitt
untere und obere Grenzen a, b	Rechteckverteilung: $\mathrm{R}(a,b)$ 	6.4.2
ungenaue untere und obere Grenzen $a \pm d$, $b \pm d$	kurvenförmige Trapezverteilung: $\mathrm{CTrap}(a,b,d)$ 	6.4.3
Summe zweier Größen mit zugeordneten Rechteckverteilungen mit unteren und oberen Grenzen a_1, b_1 und a_2, b_2	Trapezverteilung: $\mathrm{Trap}(a,b,\beta)$ mit $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $\beta = \lvert(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)\rvert / b - a$ 	6.4.4
Summe zweier Größen mit zugeordneten Rechteckverteilungen mit unteren und oberen Grenzen a_1, b_1 und a_2, b_2 und der gleichen halben Breite $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$	Dreiecksverteilung: $\mathrm{T}(a,b)$ mit $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$ 	6.4.5

geeichtes Gerät

verfügbare Information	zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Veranschaulichung (nicht maßstäblich)	Unterabschnitt
sinusförmige periodische Schwingung zwischen unterer und oberer Grenze a, b	Arcussinus-Verteilung (U-förmig): $\mathrm{U}(a,b)$ 	6.4.6
bester Schätzwert x und beigeordnete Standardunsicherheit $u(x)$	Gauß-Verteilung: $\mathrm{N}(x, u^2(x))$ 	6.4.7
bester Schätzwert $\boldsymbol{x}$ einer Vektorgröße und beigeordnete Unsicherheitsmatrix $U(\boldsymbol{x})$	multivariate Gauß-Verteilung: $\mathrm{N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{U_x})$	6.4.8
Folge von Anzeigewerten $x_1,\ldots,x_N$, welche unabhängig voneinander als Stichprobe einer Größe, die eine Gauß-Verteilung besitzt, genommen worden sind, mit unbekanntem Erwartungswert und unbekannter Varianz	Skalierte und verschobene t-Verteilung: $t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n)$ mit $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$, $s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / n-1$ 	6.4.9.2
bester Schätzwert x, erweiterte Unsicherheit U_p, Erweiterungsfaktor k_p und Anzahl der effektiven Freiheitsgrade ν_{eff}	skalierte und verschobene t-Verteilung: $t_{\nu_{\mathrm{eff}}}(x, (U_p/k_p)^2)$ 	6.4.9.7
bester Schätzwert x einer nicht negativen Größe	Exponentialverteilung: $\mathrm{Ex}(1/x)$ 	6.4.10

Gerät mit Kalibrierschein
(der *k*-Faktor sollte angegeben sein)

Gerät mit Kalibrierschein und zusätzlichen Informationen
(z.B. *k*-Faktor, effektive Freiheitsgrade)

Quelle: deutsche Übersetzung des GUM S1

4. Zusammenhang *k*-Faktor und Verteilungen

c. effektive Freiheitsgrade ν_{eff}

GUM, Tabelle G.2:

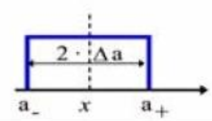
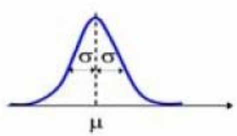
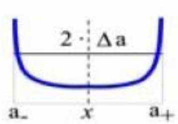
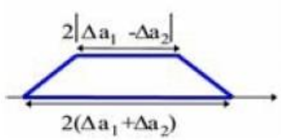
Freiheits-grade	Anteil p in % 68,27(a)	90	95	95,45	99	99,73	
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,8	
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21	
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22	
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62	
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51	
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90	
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96	GUM G.6.6 Empfehlung
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33	meine Empfehlung
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16	
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077	
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000	

2. Welche Paramete

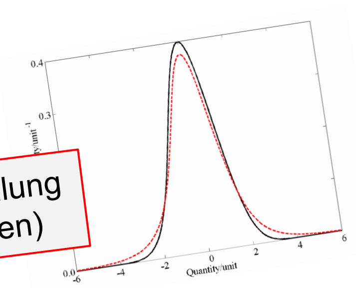
4. Zusammenhang *k*-Faktor und Verteilungen

a. Wahrscheinlichkeitsverteilung des Messergebnisses

Einschätzen der beteiligten Größen

Kenntnisse über die Größe	**Resultierende *PDF***		**Standardabweichung**		
Mögliche Werte sind in einem Intervall enthalten		gleichverteilt	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{3}}$		
Erwartungswert μ und Standardabweichung σ		gaußförmig	$u_x = \sigma$		
Größe ist Funktion $X = \Delta a \cdot \sin\Phi$ Phasenwinkel Φ unbekannt		U-förmig	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{2}}$		
Größe ist Summe/ Differenz zweier Größen X_1, X_2; Kenntnisse entspr. rechteckförmigen *PDF*		trapezförmig	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{6}}\sqrt{1+\beta^2}$	**dreieckförmig ($\beta = 0$)**	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{6}}$

+ Student- oder t-Verteilung (abh. v. Freiheitsgraden)



PDF: probability density function, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Inhalt:

1. Was macht der *k*-Faktor ?
2. Welche Parameter legen den Wert des *k*-Faktors fest ?
3. Wo tritt der *k*-Faktor auf ?
4. Zusammenhang *k*-Faktor und mögliche Messwertverteilungen
5. Zusammenfassung

5. Zusammenfassung

- *k* = 2 ist nur dann richtig, wenn das Messergebnis (die Ausgangsgröße) normal verteilt ist, d.h.

  - die Eingangsgrößen überwiegend normalverteil sind oder die Anteile der Unsicherheiten der zahlreichen Eingangsgrößen annähernd gleich groß sind,

  - der effektive Freiheitsgrad größer als 10 (besser: 25) ist.
- Bei einem Messergebnis, das zwar normalverteilt ist, deren effektiver Freiheitsgrad aber kleiner als 10 (besser: 25) ist, muss der Erweiterungs-faktor entsprechend der t-Verteilung genutzt werden.
- Wenn das Messergebnis eine andere Verteilung hat, ist für den *k*-Faktor ein anderer Wert zu nehmen.
- Der *k*-Faktor hängt von dem Grad des Vertrauens ab, der für das Mess-ergebnis gewünscht oder gefordert wird; im technischen Bereich wird oft 95 % gewählt, für den sicherheitsrelevanten oder rechtlichen Bereich kann / wird das meist zu niedrig sein.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit,
gibt es Fragen ?