Kausalität, Korrelation und Kovarianz bei Messunsichercheitanalysen

Kausalität

↓

Korrelation

↓

Kovarianz

- Standard-Verfahren des GUM
- Grundbegriffe
- Schätzung der Korrelation
- Kombinieren der Unsicherheiten
- Beispiele
- Monte-Carlo-Simulation
- Zusammenfassung

Maryna Galovska,
Volkswagen AG
maryna.galovska@volkswagen.de

Berechnung der Messunsicherheit –Empfehlungen für die Praxis, Berlin, 17. und 18. März 2016

1. Standard-Verfahren des GUM

Kausalität

↓

Korrelation

↓

Kovarianz

1. Modellieren der Messung
2. Einschätzung der Größen
3. **Einschätzung der Korrelationen**
4. Kombinieren der Werte und Unsicherheiten **unter der Berücksichtigung der Korrelationen**
5. Schätzung der erweiterten Messunsicherheit
6. Angeben des vollständigen Messergebnisses

$$Y = f\,(X_1, X_2, \ldots, X_M) \Rightarrow y \pm U$$

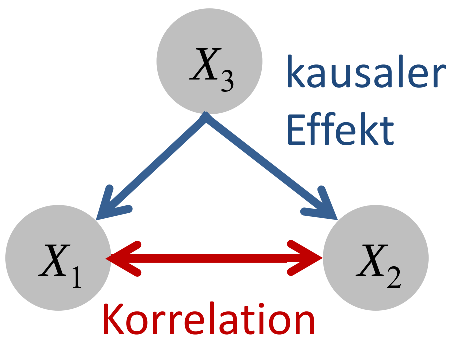
x_1, u_1 $\quad$ x_2, u_2 $\quad$ x_M, u_M

$r\,(x_1, x_2)$

2.1 Kausalität und Korrelation

Kausalität: Veränderung X_1 ist Ursache für Veränderung X_2 (Wirkung)

Korrelation durch eine gemeinsame dritte Variable:



Zusammenhang zwischen Zufallsgrößen innerhalb einer Verteilung

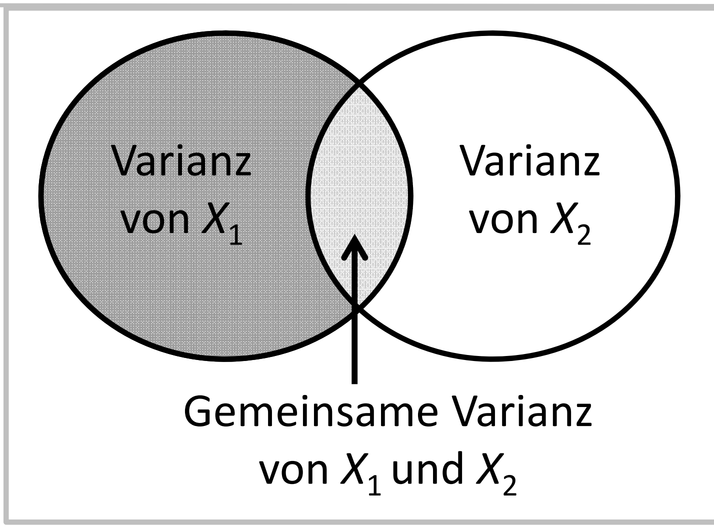
Aufgrund desselben

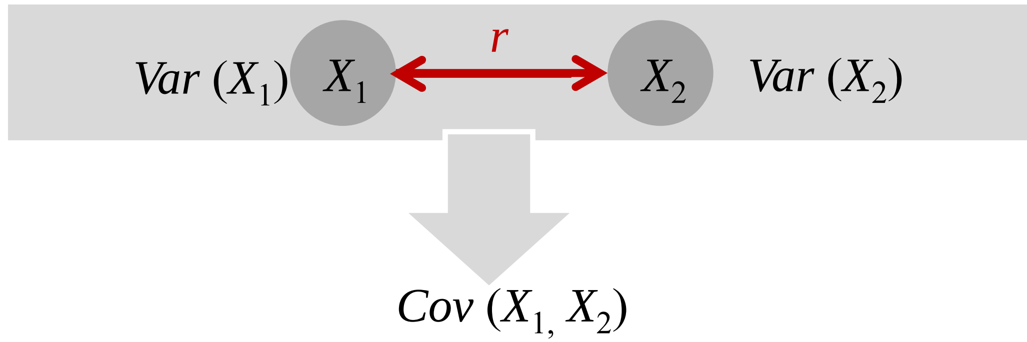
- Normals
- Messgeräts
- Referenzwerts

…

Korrelation zwischen X_1 und X_2 darf nicht als kausal interpretiert werden!

2.2 Korrelation und Kovarianz





Korrelationskoeffizient charakterisiert den Grad der Korrelation

Im Kontext der Messunsicherheit:

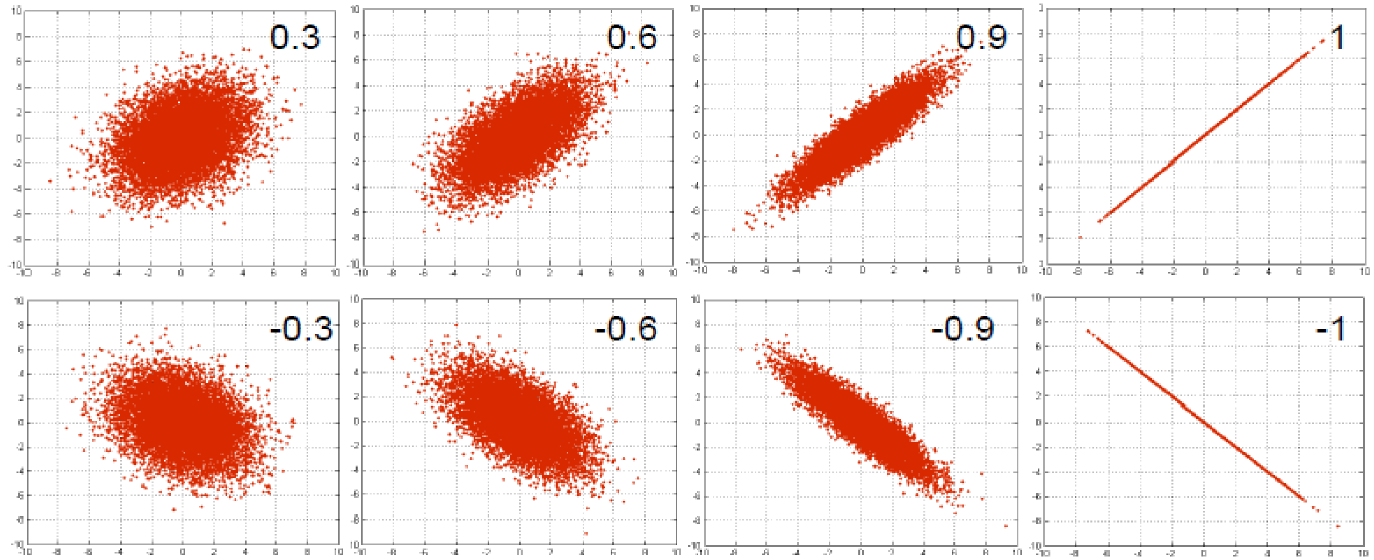
$$u(x_1, x_2) = u(x_1)u(x_2)r(x_1, x_2)$$

$$-1 \leq r(x_1, x_2) \leq 1$$

Schätzung der Kovarianz:

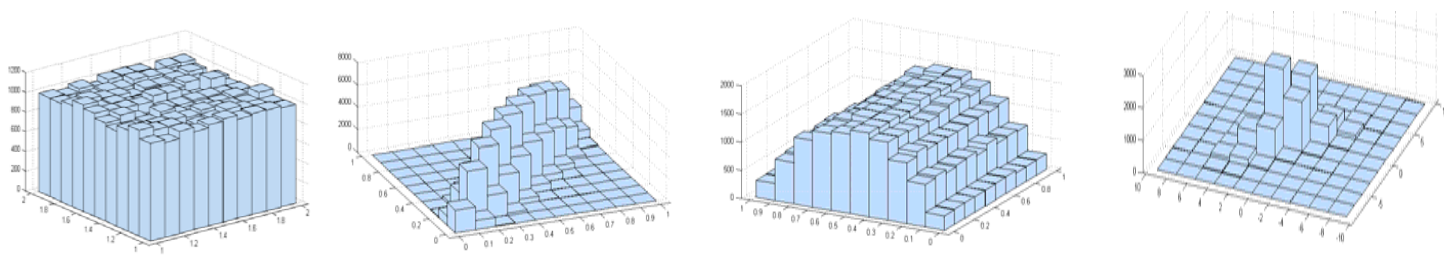
- Experimentell aus Messreihen
- Modellbasiert, aus Erfahrung oder Vorkenntnissen.

2.3 Darstellung von zwei korrelierten Größen



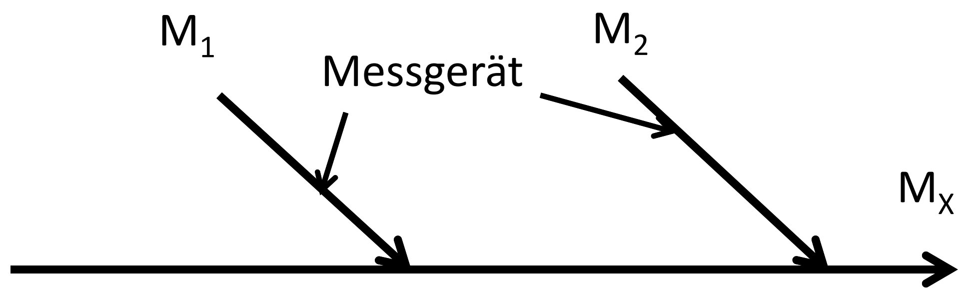
Supplement 1: **multivariate Gauß-Verteilungen**

Andere Verteilungen:



2.4 Korrelation. Extrembeispiel

$$M_X = M_1 - M_2$$



Ohne Berücksichtigung der Korrelation
$r(m_1, m_2) = 0$
$u^2(m_X) = u^2(m_1) + u^2(m_2)$ $\longrightarrow$ $u^2(m_X) = 2 \cdot u^2(m_2)$

Mit Berücksichtigung der Korrelation
$r(m_1, m_2) = 1$
$u^2(m_X) = (u(m_1) - u(m_2))^2$ $\longrightarrow$ $u^2(m_X) = 0$

$u(m_1) = u(m_2)$

Schätzwert der Messunsicherheit liegt im Intervall von 0 bis $2 \cdot u^2(m_2)$ abhängig von der Berücksichtigung der Korrelation!

3. Berechnung der Kovarianz

Korrelation	Beobachtete Korrelation	Logische Korrelation
Ermittlung	Statistisch (Type A)	Nicht statistisch (Type B)
Verfügbare Information	Beobachtungen bei den Wiederholmessungen: $X_1 : x_{11}, x_{12} \ldots x_{1n}$ $X_2 : x_{21}, x_{22} \ldots x_{2n}$	Messgrößen sind von einer Größe abhängig: $X_1 = F_1(q),\ X_2 = F_2(q)$
Kovarianz $u(x_1, x_2)$	$\frac{1}{n(n-1)} \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)$	$\frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial F_2}{\partial q} u_q{}^2$
$r(x_1, x_2)$	$\frac{u(x_1, x_2)}{u(x_1) u(x_2)}$	

3. Kombinieren der Unsicherheiten

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_M)$$

u	X_1	X_2	$\ldots$	X_M
X_1	$u^2(x_1)$	$u(x_1, x_2)$	$\ldots$	$u(x_1, x_M)$
X_2	$u(x_2, x_1)$	$u^2(x_2)$	$\ldots$	$u(x_2, x_M)$
…	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
X_M	$u(x_M, x_1)$	$u(x_M, x_2)$		$u^2(x_M)$

Kombinierte Varianz:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i}^{N} c_{ij} u(x_i, x_j)$$

c	X_1	X_2	$\ldots$	X_M
X_1	$c^2{}_1$	$c_1 \cdot c_2$	$\ldots$	$c_1 \cdot c_M$
X_2	$c_1 \cdot c_2$	$c^2{}_2$	$\ldots$	$c_2 \cdot c_M$
…	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
X_M	$c_1 \cdot c_M$	$c_2 \cdot c_M$		$c^2{}_M$

Sensitivitätskoeffitienten:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

3. Kombinieren der Unsicherheiten

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_M)$$

r	X_1	X_2	$\ldots$	X_M
X_1	1	$r(x_1, x_2)$	$\ldots$	$r(x_1, x_M)$
X_2	$r(x_2, x_1)$	1	$\ldots$	$r(x_2, x_M)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
X_M	$r(x_M, x_1)$	$r(x_M, x_2)$		1

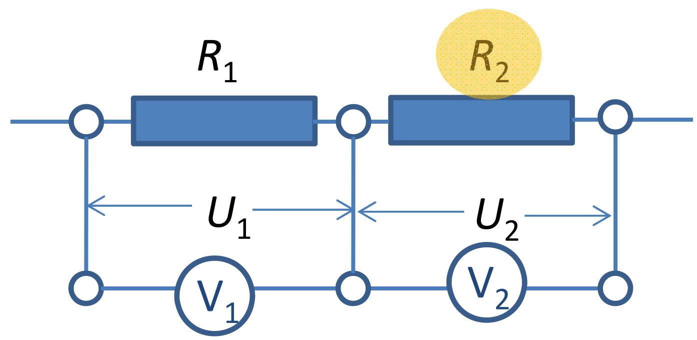
c	X_1	X_2	$\ldots$	X_M
X_1	$c^2{}_1$	$c_1 \cdot c_2$	$\ldots$	$c_1 \cdot c_M$
X_2	$c_1 \cdot c_2$	$c^2{}_2$	$\ldots$	$c_2 \cdot c_M$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
X_M	$c_1 \cdot c_M$	$c_2 \cdot c_M$		$c^2{}_M$

Kombinierte Varianz:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)$$

4.1 Beispiel. Beobachtete Korrelation

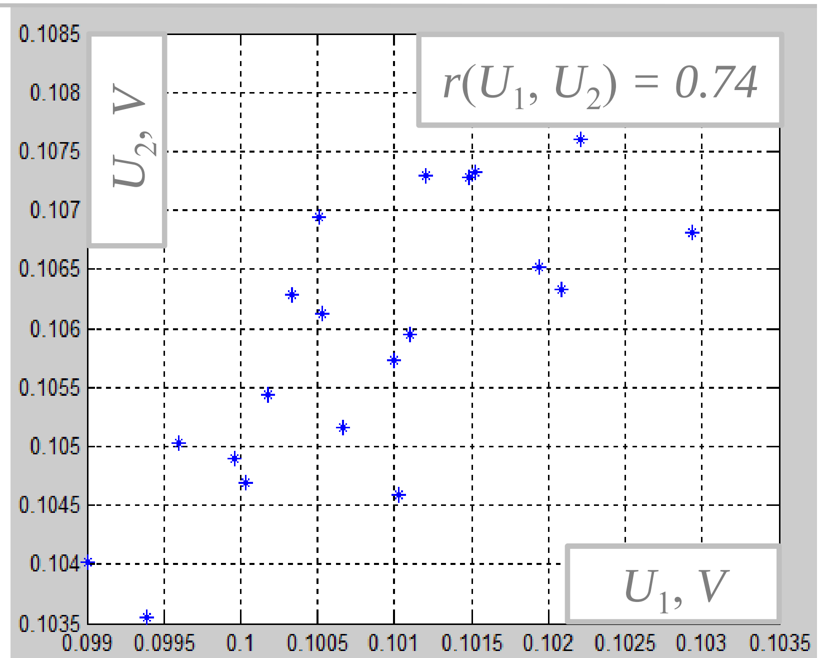
Messung des Widerstandes:



Messgleichung:

$$R_2 = \frac{U_2}{U_1} R_1$$

R_1 –Normalwiderstand: 100,0037 *Ω; u*=0,0002 *Ω*



Wiederholmessungen:

U_1: 0,0994; 0,1005; 0,1000; 0,1005; 0,1003; 0,1015; 0,1000; 0,1002; 0,1011; 0,1021 V

U_2: 0,1035; 0.1069; 0,1047; 0,1061; 0.1063; 0,1073; 0,1049; 0,1054; 0,1060; 0,1063 V

Weil die Schwankungen einer Stromquelle auf zwei Größen (U_1, U_2) wirken, kommt es zur Korrelation.

4.1 Beispiel. Beobachtete Korrelation

Komponenten der Unsicherheit:

	A/B	x	u
U_1	A	0,1006 V	0,0008 V
U_2	A	0,1057 V	0,0011 V
R_1	B	100,0037 Ω	0,0002 Ω

Korrelation:

r	U_1	U_2	R_1
U_1	1	0,74	0
U_2	0,74	1	0
R_1	0	0	1

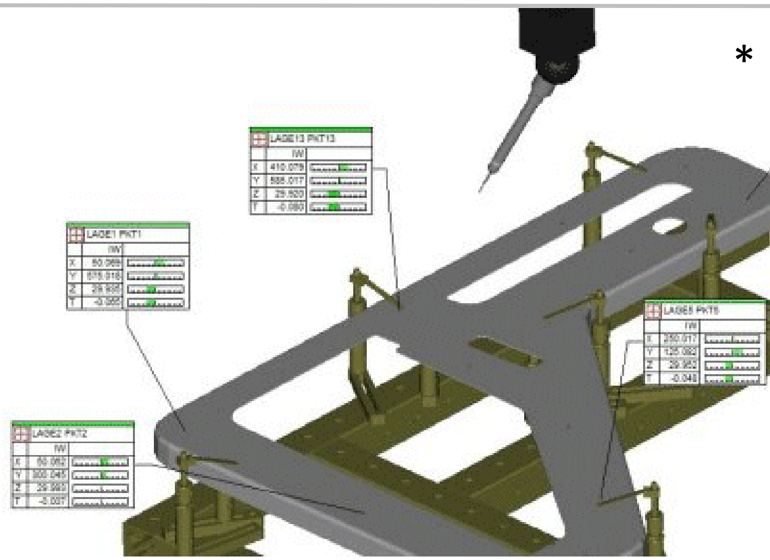
Empfindlichkeitskoeffizienten:

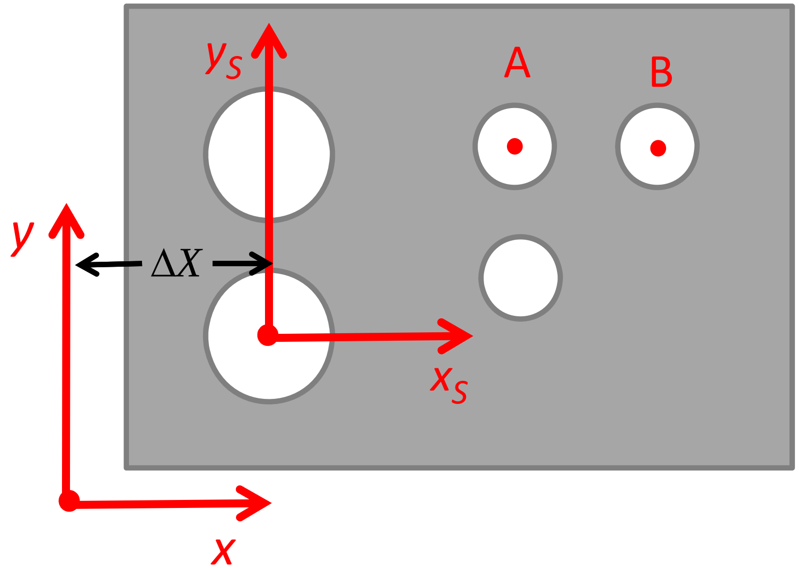
$$c_{U_1} = -\frac{U_2 R_1}{U_1^2} \qquad c_{U_2} = \frac{R_1}{U_1} \qquad c_{R_1} = \frac{U_2}{U_1}$$

Kombinierte Varianz:

$$u_c^2(R_2) = c_{U_1}^2 u^2(U_1) + c_{U_2}^2 u^2(U_2) + c_{R_1}^2 u^2(R_1) + 2 c_{U_1} c_{U2} u(U_1) u(U_2) r(U_1, U_2)$$

4.2 Beispiel. Logische Korrelation


*



Messung der X-Position von A und B in einem anderen Koordinatensystem:
X_{AS} und X_{BS} sind korreliert (aufgrund der gemeinsamen Transformation)

$$F_1 : X_{AS} = X_A + \Delta X$$
$$F_2 : X_{BS} = X_B + \Delta X$$

$$r(X_{AS}, X_{BS}) = ?$$

*http://www.phi-design.de/

4.2 Beispiel. Logische Korrelation

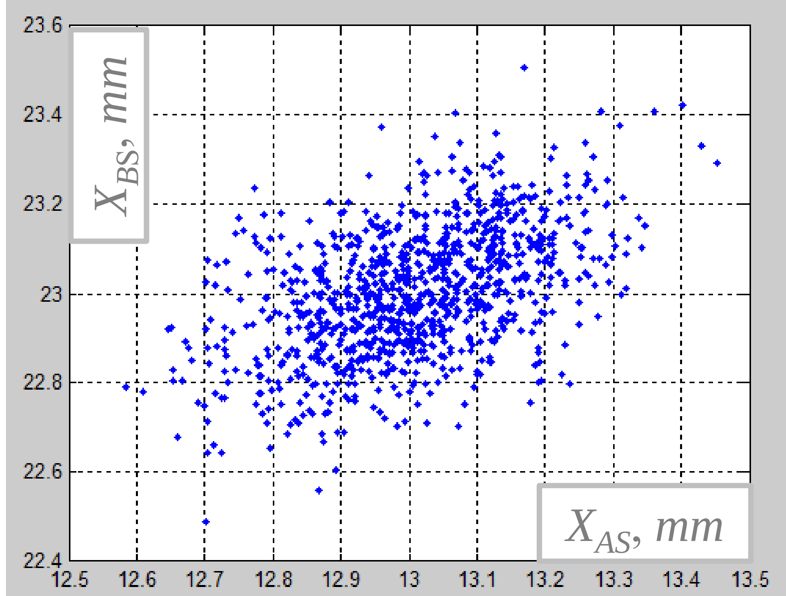
$$r(x_{AS},x_{BS})=\frac{u(x_{AS},x_{BS})}{u(x_{AS})u(x_{BS})} \quad u(x_{AS},x_{BS})=\frac{\partial F_1}{\partial(\Delta X)}\frac{\partial F_2}{\partial(\Delta X)}u^2(\Delta x) \quad \begin{matrix} F_1: X_{AS}=X_A+\Delta X \\ F_2: X_{BS}=X_B+\Delta X \end{matrix}$$

Annahme:
Messunsicherheiten der X-Koordinate von A und B und der Transformation sind gleich:

$$u(x_A)=u(x_B)=u(\Delta x)=u(x)=0{,}05mm$$

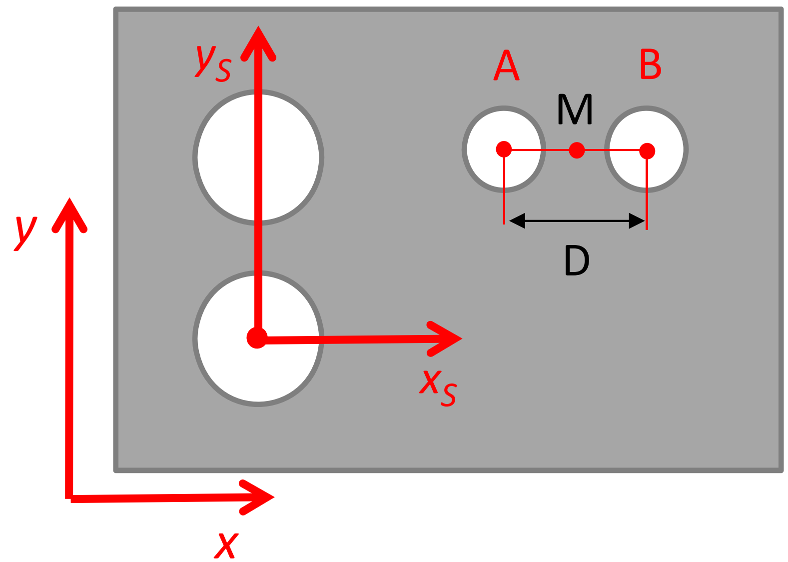
$$u(x_{AS})=u(x_{BS})=\sqrt{u^2(x_A)+u^2(\Delta x)}=u(x)\sqrt{2}$$

$$r(x_{AS},x_{BS})=\frac{u^2(x)}{2u(x)u(x)}=0{,}5$$



Monte-Carlo-Simulation

4.2 Beispiel. Logische Korrelation



Mittelpunkt:

$$M = (X_A + X_B)/2$$

Abstand:

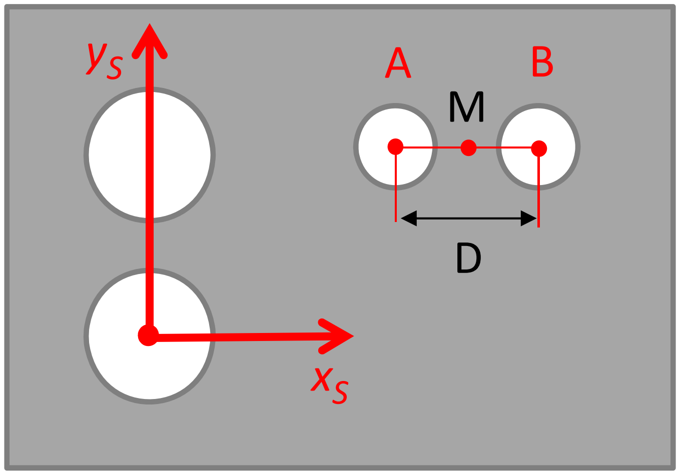
$$D = X_B - X_A$$

Berechnete im (x,y)-Koordinatensystem (vor der Transformation) Funktionsmaßen

$$u_c^2(M) = \frac{u^2(x_A) + u^2(x_B)}{4} = \frac{1}{2}u^2(x) \qquad u_c(M) = 0{,}035mm$$

$$u_c^2(D) = u^2(x_A) + u^2(x_B) = 2u^2(x) \qquad u_c(D) = 0{,}071mm$$

4.2 Beispiel. Logische Korrelation



Mittelpunkt:

$$M = (X_A + X_B)/2$$

Abstand:

$$D = X_B - X_A$$

Mittelpunkt in S-Koordinatensystem:

$$M_S = (X_{AS} + X_{BS})/2$$

Abstand:

$$D_S = X_{BS} - X_{AS}$$

$$u_c^2(M_S) = \frac{u^2(x_{AS}) + u^2(x_{BS}) + 2u(x_{AS})u(x_{BS})r(x_{AS}, x_{BS})}{4} = \frac{4u^2(x) + 2u^2(x)}{4} = \frac{3}{2}u^2(x)$$

$$u_c^2(M) = \frac{u^2(x_A) + u^2(x_B)}{4} = \frac{1}{2}u^2(x) \qquad u_c(M) = 0{,}035mm \qquad u_c(M_S) = 0{,}061mm^2$$

$$u_c^2(D_S) = u^2(x_{AS}) + u^2(x_{BS}) - 2u(x_{AS})u(x_{BS})r(x_{AS}, x_{BS}) = 4u^2(x) - 2u^2(x) = 2u^2(x)$$

$$u_c^2(D) = u^2(x_A) + u^2(x_B) = 2u^2(x) \qquad u_c(D) = 0{,}071mm \qquad u_c^2(D_S) = 0{,}071mm^2$$

5. Monte-Carlo-Simulation

```
u=0.05; N=100000;
```

```
A=10+normrnd(0, u, 1, N);
B=20+normrnd(0, u, 1, N);
dx=-3+normrnd(0, u, 1, N);
As=A+dx;
Bs=B+dx;
plot(As, Bs, '.')
```

```
X=[10-3; 20-3]'; N=100000;
u=0.05*sqrt(2); r=0.5; M=2;
cov=[u*u  r*u*u; r*u*u u*u ];
```

```
for i=1:M
   R=mvnrnd(X, cov, N);
   plot(R(:, 1),R(:, 2), '.');
   hold on
end
As=R(:, 1); Bs=R(:, 2);
```

$$F_1 : X_{AS} = X_A + \Delta X$$
$$F_2 : X_{BS} = X_B + \Delta X$$

```
r=corr(As', Bs')
```

$$r(x_{AS}, x_{BS})$$

```
Ms=(As+Bs)/2;
Ds=Bs-As;
```

```
u_M=std(Ms)
u_D=std(Ds)
```

$$u_c(M_S), u_c(D_S)$$

```
Ms=(As+Bs)/2;
Ds=Bs-As;
```

```
u_M=std(Ms)
u_D=std(Ds)
```

5. Zusammenfassung

- Korrelation beschreibt den Zusammenhang zwischen den Variablen. Korrelation im Kontext der Messunsicherheit ist durch eine dritte Variable verursacht. Korrelation darf nicht immer als kausal betrachtet.

- Kovarianz (Mischkomponente der Unsicherheit) muss geschätzt oder experimentell ermittelt werden.

- Die kombinierte Unsicherheit unter Berücksichtigung der Korrelation kann nach GUM oder Monte-Carlo-Methode (Supplement 1) berechnet werden.

- Korrelationen können die kombinierte Messunsicherheit sowohl vergrößern als auch verringern.

Danke für die Aufmerksamkeit!