



JCGM 104:2009

**Evaluation of measurement
data — An introduction to the
“Guide to the expression of
uncertainty in measurement”
and related documents**

*Évaluation des données de mesure — Une
introduction au “Guide pour l’expression de
l’incertitude de mesure” et aux documents
qui le concernent*

First edition July 2009

© JCGM 2009

JCGM 104:2009

Auswertung von Messdaten – Eine Einführung zum "Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen" und zu den dazugehörigen Dokumenten

Erste Ausgabe Juli 2009

Dieses Dokument wurde von der *Arbeitsgruppe 1 des Gemeinsamen Ausschusses für Leitfäden in der Metrologie* (JCGM/WG 1) erstellt.

Das Urheberrecht für dieses Dokument teilen sich die JCGM-Mitgliedsorganisationen (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP und OIML).

Urheberrechte

Auch wenn die elektronische Version dieses Dokuments (in Englisch und Französisch) auf der Webseite des BIPM (www.bipm.org) kostenlos heruntergeladen werden kann, teilen sich die JCGM-Mitgliedsorganisationen das Urheberrecht für dieses Dokument, so dass die Rechte auf alle entsprechenden Logos und Firmenzeichen diesen gehören und international geschützt sind. Dritte dürfen an dem Dokument keinerlei Änderungen vornehmen, Kopien davon an die Öffentlichkeit verteilen oder verkaufen, es über die Medien verbreiten oder es online verwenden. Alle kommerziellen Verwendungen, die Vervielfältigung oder Übersetzung dieses Dokuments und/oder von darin enthaltenen Logos, Firmenzeichen oder Veröffentlichungen bedürfen der vorherigen Genehmigung des Vorsitzenden des BIPM.

Auswertung von Messdaten – Eine Einführung zum "Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen" und zu den dazugehörigen Dokumenten

Das Urheberrecht für diesen Leitfaden teilen sich die JCGM-Mitgliedsorganisationen (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP und OIML).



Urheberrecht

Auch wenn elektronische Versionen dieses Dokuments auf der Webseite einer oder mehrerer JCGM- Mitgliedsorganisationen kostenlos heruntergeladen werden können, sind die wirtschaftlichen und die Urheberrechte an allen Veröffentlichungen des JCGM international geschützt. Das JCGM untersagt Dritten, Ausgaben dieses Dokuments ohne Genehmigung des JCGM zu verändern, Kopien davon an die Öffentlichkeit zu verteilen oder zu verkaufen, sie über die Medien zu verbreiten oder sie online zu verwenden. Das JCGM verbietet außerdem Verfälschungen, Hinzufügungen oder Verstümmelung seiner Veröffentlichungen sowie von Titeln, Mottos und Logos. Dies gilt in gleichem Maße für Dokumente seiner Mitgliedsorganisationen.

Offizielle Versionen und Übersetzungen

Die einzigen offiziellen Versionen von Dokumenten sind die vom JCGM veröffentlichten Versionen in der Originalsprache bzw. in den Originalsprachen (Englisch und Französisch).

Die Veröffentlichungen des JCGM dürfen auch in andere Sprachen übersetzt werden als die, in der die Originaldokumente ursprünglich vom JCGM veröffentlicht wurden. Vor der Übersetzung muss beim JCGM allerdings eine Genehmigung beantragt werden. Alle Übersetzungen müssen das ursprüngliche und offizielle Format der Formeln und Einheiten beibehalten (ohne Konversionen in andere Formeln oder Einheiten) und folgenden Passus enthalten (dieser ist in die jeweilige Sprache zu übersetzen):

Alle Veröffentlichungen des JCGM sind international urheberrechtlich geschützt. Diese Übersetzung des ursprünglichen JCGM-Dokuments wurde mit Genehmigung des JCGM erstellt. Das JCGM behält das vollständige, international geschützte Urheberrecht für die Form und den Inhalt dieses Dokuments und für die Titel, Mottos und Logos. Die Mitgliedsorganisationen des JCGM behalten ebenfalls das vollständige, international geschützte Urheberrecht für ihre in den JCGM-Veröffentlichungen enthaltenen Titel, Mottos und Logos. Die einzige offizielle Version ist das vom JCGM veröffentlichte Dokument in seinen ursprünglichen Sprachen.

Für die Relevanz, Richtigkeit, Vollständigkeit oder Qualität der in einer Übersetzung enthaltenen Informationen und Materialien übernimmt das JCGM keine Verantwortung. Dem JCGM ist eine Kopie der Übersetzung zum Zeitpunkt ihrer Veröffentlichung einzureichen.

Vervielfältigung

Die Veröffentlichungen des JCGM dürfen vervielfältigt werden, wenn das JCGM eine diesbezügliche schriftliche Genehmigung erteilt hat. Von jedem vervielfältigten Dokument ist dem JCGM zum Zeitpunkt der Vervielfältigung ein Exemplar einzureichen, das folgenden Hinweis enthalten muss:

Dieses Dokument wurde mit der Genehmigung des JCGM vervielfältigt; das JCGM behält das vollständige, international geschützte Urheberrecht für die Form und den Inhalt dieses Dokuments und für die Titel, Mottos und Logos. Die Mitgliedsorganisationen des JCGM behalten ebenfalls das vollständige, international geschützte Urheberrecht für ihre in den JCGM-Veröffentlichungen enthaltenen Titel, Mottos und Logos. Die einzigen offiziellen Versionen der Dokumente sind die vom JCGM veröffentlichten Originalversionen.

Haftungsausschluss

Das JCGM und seine Mitgliedsorganisationen veröffentlichen dieses Dokument, um den Zugang zu Informationen auf dem Gebiet der Metrologie zu erleichtern. Sie haben sich zum Ziel gesetzt, dieses Dokument regelmäßig zu aktualisieren, können jedoch nicht gewährleisten, dass die Informationen auch wirklich immer richtig sind. Für direkte wie indirekte Schäden, die aus der Verwendung dieses Dokuments entstehen, können sie nicht verantwortlich gemacht werden. Der Verweis auf im Handel angebotene Produkte jeglicher Art (wie z. B. - aber nicht ausschließlich - Software, Daten oder Hardware) oder die Links zu anderen Webseiten, auf die das JCGM und seine Mitgliedsorganisationen keinen Einfluss haben und für die sie keine Verantwortung übernehmen, bedeutet keine Befürwortung oder Empfehlung dieser Produkte oder Links durch das JCGM oder seiner Mitgliedsorganisationen.

Inhalt

	Seite
Vorwort	6
Anmerkung zur deutschen Ausgabe	6
1 Anwendungsbereich	8
2 Normative Verweisungen	9
3 Was ist Messunsicherheit	9
4 Begriffe und Grundprinzipien	12
5 Schritte der Messunsicherheitsermittlung	16
6 Die Formulierungsphase: Entwicklung eines Modells der Messung	17
7 Die Berechnungs- (Fortpflanzungs- und Zusammenfassungs-) phase der Unsicherheitsermittlung	19
7.1 Allgemeines	19
7.2 Die Methode des GUM	19
7.3 Analytische Methoden	21
7.4 Monte-Carlo-Methode	22
7.5 Messmodelle mit einer beliebigen Anzahl von Ausgangsgrößen	22
8 Messunsicherheit in der Konformitätsbewertung	23
9 Anwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate	24
A Akronyme und Initialwörter	25
B Bibliographie	26
Alphabetischer Index	27

Vorwort

Im Jahre 1997 wurde von den 7 internationalen Organisationen, die 1993 den *Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen* (GUM) und das *Internationale Wörterbuch der Metrologie* (VIM) erarbeitet hatten, ein *Gemeinsamer Ausschuss für Leitfäden in der Metrologie* (JCGM) ins Leben gerufen. Dieser Ausschuss wird vom Direktor des BIPM geleitet. Das JCGM hat die Verantwortung für diese beiden Dokumente von der ISO Technischen Beratungsgruppe 4 (TAG4) übernommen.

Der *Gemeinsame Ausschuss* besteht aus dem BIPM, der Internationalen Elektrotechnischen Kommission (IEC), der International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine (IFCC), der International Laboratory Accreditation Cooperation, der Internationalen Organisation für Normung (ISO), der Internationalen Union für reine und angewandte Chemie (IUPAC), der Internationalen Union für reine und angewandte Physik (IUPAP) und der Internationalen Organisation für das gesetzliche Messwesen (OIML).

Das JCGM hat zwei Arbeitsgruppen: *Arbeitsgruppe 1* ("*Angabe der Unsicherheit beim Messen*") hat die Aufgabe, die Anwendung des GUM zu fördern und Ergänzungen und weitere Dokumente zum Zweck einer breiteren Anwendung zu erarbeiten. *Arbeitsgruppe 2* ("*Arbeitsgruppe zum Internationalen Wörterbuch der Metrologie* (VIM)") hat die Aufgabe, das VIM zu aktualisieren und seine Anwendung zu fördern. Nähere Informationen zu den Tätigkeiten des JCGM erhalten Sie auf der Webseite des BIPM unter www.bipm.org.

Das vorliegende Dokument wurde von der *Arbeitsgruppe 1* des JCGM erarbeitet, mit Hilfe detaillierter Vorschläge und Empfehlungen von Seiten der Mitgliedsorganisationen des JCGM.

Dieses Dokument ist Teil einer Serie von JCGM-Dokumenten unter dem allgemeinen Titel "Auswertung von Messdaten". Die Teile dieser Serien sind folgende:

- JCGM 100:2008. Auswertung von Messdaten — Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen (GUM) (siehe Abschnitt 2),
- JCGM 101:2008. Auswertung von Messdaten – Supplement 1 zum "Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen" – Fortpflanzung von Verteilungen unter Verwendung einer Monte-Carlo-Methode (siehe Abschnitt 2),
- JCGM 102. Auswertung von Messdaten – Supplement 2 zum "Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen" – Modelle mit einer beliebigen Anzahl an Ausgangsgrößen,
- JCGM 103. Auswertung von Messdaten – Supplement 3 zum "Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen" – Modellierung,
- JCGM 104. Auswertung von Messdaten – Eine Einführung zum "Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen" und zu den dazugehörigen Dokumenten [dies ist das hier vorliegende Dokument],
- JCGM 105. Auswertung von Messdaten – Konzepte und Grundprinzipien,
- JCGM 106. Auswertung von Messdaten – Die Rolle der Messunsicherheit in der Konformitätsbewertung, und
- JCGM 107. Auswertung von Messdaten – Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate (least-squares method).

Anmerkung zur deutschen Ausgabe

Die deutsche Fassung dieser Einführung wurde 2011 durch die Physikalisch-Technische Bundesanstalt anhand der englischen Ausgabe erstellt. Bei falschen oder missverständlichen Formulierungen oder anderen Fehlern der Übersetzung bitten wir um einen entsprechenden Hinweis (Hinweise bitte an stephan.mieke@ptb.de).

Einführung

Eine Aussage zur Messunsicherheit ist unerlässlich, um beurteilen zu können, ob ein Messwert für einen bestimmten Zweck geeignet ist. Beim Gemüsehändler wäre der Kunde zum Beispiel schon zufrieden, wenn die Abweichung der Waage beim Kauf eines Kilogramms Obst höchstens 2 g betrüge. Im Gegensatz hierzu geht es in der Luftfahrt um ganz andere Größen: Wenn die Abmessungen der Bauteile der Gyroskope in den Trägheitsnavigationssystemen eines Verkehrsflugzeugs auf ihre Funktionsfähigkeit hin geprüft werden, geht es um Anteile (Genauigkeiten) im Millionstelbereich.

Die Messunsicherheit ist ein allgemeingültiges Konzept, das bei jeder Messung eine Rolle spielt. Die Messunsicherheit kann sowohl bei fachlichen Entscheidungsfindungsprozessen herangezogen werden als auch zur Urteilsbegründung in vielen – sowohl theoretischen als auch experimentellen - Bereichen. Da die Toleranzen, die bei industriellen Herstellungsprozessen gelten, immer anspruchsvoller werden, gewinnt auch die Messunsicherheit immer mehr an Bedeutung, wenn es darum geht, die Einhaltung der Toleranzen zu bewerten. Im Bereich der Qualitätsbewertung und der Qualitätsstandards spielt die Messunsicherheit eine zentrale Rolle.

Ob Industrie, Handel, Wissenschaft, Gesundheit, Sicherheit oder Umwelt – Messen ist eine Tätigkeit, die mit fast allen menschlichen Tätigkeitsbereichen verbunden ist. Bei all diesen Tätigkeiten tragen Messungen zum Entscheidungsfindungsprozess bei. Die Messunsicherheit erlaubt es den Nutzern eines Messwerts, Vergleiche anzustellen und – im Rahmen der Konformitätsbewertung – die Wahrscheinlichkeit einer falschen Entscheidung aufgrund einer Messung zu ermitteln, sowie mit den einhergehenden Risiken richtig umzugehen.

Dieses Dokument dient als Einführung in die Messunsicherheit, den GUM und die im Vorwort angegebenen zugehörigen Dokumente. Zur Ermittlung der Unsicherheit wird eine wahrscheinlichkeitstheoretische Methode angewendet. In Anhang A sind die in diesem Dokument verwendeten Akronyme und Initialwörter aufgelistet.

Es ist geplant, in zukünftigen Ausgaben des JCGM 200 (VIM) klar zwischen der Verwendung des Begriffs "Messabweichung" als Größe und als Größenwert zu unterscheiden. Dasselbe gilt für den Begriff "Anzeige". Im vorliegenden Dokument wird diese Unterscheidung vorgenommen. Hingegen wird in JCGM 200:2008 nicht explizit dazwischen unterschieden.

Auswertung von Messdaten – Eine Einführung zum "Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen" und zu den dazugehörigen Dokumenten

1 Anwendungsbereich

Dieses Dokument wurde vom Gemeinsamen Ausschuss für Leitfäden in der Metrologie (JCGM) erarbeitet. Es soll für folgende Zwecke dienen: als Anleitung für eine gut fundierte Ermittlung der Messunsicherheit durch die Anwendung des GUM (siehe Abschnitt 2) sowie als Einführung in die Ergänzungen des GUM und in andere vom JCGM erstellten Dokumente (JCGM 101:2008 - siehe Abschnitt 2 - und Referenzen [3, 4, 5, 6, 7]).

Wie beim GUM, liegt der Schwerpunkt auch bei diesem Dokument auf der Angabe der Unsicherheit bei der Messung einer wohldefinierten Größe – *der Messgröße* [JCGM 200:2008 (VIM) 2.3] – die durch einen *im wesentlichen eindeutigen wahren Wert* charakterisiert werden kann [JCGM 200:2008 (VIM) 2.11 ANMERKUNG 3]. Der GUM liefert zwar eine gute Begründung dafür, warum der Begriff "*wahr*" nicht verwendet werden sollte, aber in dem hier vorliegenden Dokument wird dieser Ausdruck trotzdem an den Stellen verwendet, an denen es sonst zu Mehrdeutigkeiten und Irreführungen kommen könnte.

Ziel der Ergänzungen zum GUM und der anderen vom JCGM erstellten Dokumente ist es, die korrekte Auslegung sowie die Anwendung des GUM zu fördern. Die Ergänzungen zum GUM und die anderen zum GUM gehörigen Dokumente sollen zusammen einen bedeutend breiteren Anwendungsbereich haben als der GUM selbst.

Dieses Dokument versteht sich als eine Einführung in die Messunsicherheit, in den GUM und in die Ergänzungen (Supplements) zum GUM sowie in die anderen begleitenden Dokumente, die zur Unterstützung des GUM erarbeitet wurden. Es konzentriert sich hauptsächlich auf die Messungen von Größen wie z. B. die Länge, die Temperatur, die Zeit und die Stoffmenge, die durch kontinuierliche Variable charakterisiert werden können.

Dieses einführende Dokument ist in erster Linie, aber nicht ausschließlich, gedacht für

- wissenschaftliche Tätigkeitsbereiche und Disziplinen im Allgemeinen,
- industrielle Tätigkeiten und Disziplinen im Allgemeinen,
- Kalibrier-, Prüf- und Testlabors in der Industrie und Laboratorien, die in den Bereichen Gesundheit, Sicherheit und Umwelt tätig sind, sowie an
- Prüf- und Akkreditierungsstellen.

Es könnte auch für Konstrukteure hilfreich sein; denn wenn die Prüfanforderungen und die diesbezüglichen Messungen schon bei der Entwicklung eines Produkts berücksichtigt werden, können eventuell weniger strenge Anforderungen an das Fertigungsverfahren gestellt werden. Das Dokument richtet sich ferner an Hochschulen - in der Hoffnung, dass diese in den einschlägigen Studiengängen Vorlesungen zur Berechnung der Messunsicherheit anbieten werden. Dies könnte dazu beitragen, die neue Generation von Studenten besser mit Unsicherheitsangaben als unverzichtbarem Teil des Messergebnisses vertraut zu machen, so dass dem Bereich der Messung ein höherer Stellenwert einräumt wird.

Dieses einführende Dokument sowie der GUM, die GUM-Supplements und die anderen Dokumente sollten im Zusammenhang mit dem "Internationalen Wörterbuch der Metrologie (VIM)" verwendet werden, sowie in Zusammenhang mit allen drei Teilen der unter 2 genannten ISO 3534. Diese Norm definiert statistische Benennungen (verwendet in Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie, eingeschlossen angewandte Statistik sowie Konzipierung von Experimenten) und fügt diese in einen begrifflichen Rahmen ein, der den normativen Regeln der terminologischen Praxis entspricht. Diese letzte Überlegung bezieht sich auf die Tatsache, dass der theoretische Hintergrund der Messdaten- und Messunsicherheitsermittlung sich auf mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeit stützt.

2 Normative Verweisungen

Um dieses Dokument anwenden zu können, müssen die folgenden unten aufgeführten Dokumente mit herangezogen werden. Bei Dokumenten mit Jahresangabe gilt ausschließlich die angegebene Ausgabe. Bei Dokumenten ohne Jahresangabe gilt immer die neueste Ausgabe des jeweiligen Dokuments (einschließlich eventueller Nachträge).

JCGM 100:2008 Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM). Joint Committee for Guides in Metrology

Deutsche Ausgabe:

DIN V ENV 13005: 1999 Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen

JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement“ - Propagation of distributions using a Monte Carlo method.

Beiblatt 1 zu DIN V ENV 13005:2011 Auswertung von Messdaten - Supplement 1 zum Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen - Fortpflanzung von Verteilungen unter Verwendung einer Monte-Carlo-Methode

JCGM 200:2008 International Vocabulary of Metrology - Basic and general concepts and associated terms, 3rd Edition.

Deutsche Ausgabe:

Beuth Verlag:2010 Internationales Wörterbuch der Metrologie – Grundlegende und allgemeine Begriffe und zugeordnete Benennungen (VIM) – Deutsch-Englische Fassung ISO/IEC-Leitfaden 99:2007

ISO 3534-1:2006 Statistics - Vocabulary and symbols - Part 1: General statistical terms and terms used in probability.

Deutsche Ausgabe:

DIN ISO 3534-1:2009 Statistik - Begriffe und Formelzeichen - Teil 1: Wahrscheinlichkeit und allgemeine statistische Begriffe

ISO 3534-2:2006 Statistics - Vocabulary and symbols - Part 2: Applied statistics.

Deutsche Ausgabe:

DIN ISO 3534-2:2010 Statistik - Begriffe und Formelzeichen - Teil 2: Angewandte Statistik

ISO 3534-3:1999 Statistics - Vocabulary and symbols - Part 3: Design of experiments.

Deutsche Ausgabe:

DIN ISO 3534-3:20XX Statistik - Begriffe und Formelzeichen - Teil 3: Versuchsplanung (in Bearbeitung)

3 Was ist Messunsicherheit?

3.1 Ziel einer Messung ist es, Informationen zu einer bestimmten Größe - *der Messgröße* - zu erhalten [JCGM (VIM) 2.3]. Diese Messgröße kann das Volumen eines Behälters, der Spannungsabfall zwischen den Polen einer Batterie oder die Massekonzentration von Blei im Wasser in einem Glaskolben sein.

3.2 Keine Messung ist absolut genau. Wenn eine Größe gemessen wird, hängt das Ergebnis vom Messsystem [JCGM 200:2008 (VIM) 3.2], vom Messverfahren, von den Fertigkeiten des Anwenders, von der Umgebung und von weiteren Einflüssen ab [1]. Selbst wenn die Größe mehrmals auf die gleiche Weise und unter denselben Bedingungen gemessen würde, wäre der *Anzeigewert* immer unterschiedlich [JCGM 200:2008 (VIM) 4.1] (Messwert [JCGM (VIM) 2.10], vorausgesetzt, das Messsystem hat eine ausreichend hohe Auflösung, um zwischen den Anzeigewerten unterscheiden zu können. Solche Anzeigewerte werden als realisierte Werte einer Anzeigegröße betrachtet.

3.3 Die *Streuung* der Anzeigewerte hängt davon ab, wie gut die Messung durchgeführt wurde. Ihr *Mittelwert* würde (ohne systematische Messabweichungen)¹ einen *Schätzwert* [ISO 3534-1:2006 1.31] für den *wahren Wert einer Größe* [JCGM 200:2008 (VIM) 2.11] ergeben, der für gewöhnlich verlässlicher wäre als ein einzelner Anzei-

¹ Ergänzung der deutschen Fassung

gewert. Die Streuung und die Anzahl der Anzeigewerte würde Informationen zum Mittelwert als Schätzwert des wahren Werts einer Größe liefern. Diese Informationen würden jedoch im Allgemeinen nicht ausreichen.

3.4 Das Messsystem kann Anzeigewerte liefern, die nicht um den wahren Wert einer Größe streuen, sondern um einen vom wahren Wert einer Größe verschobenen Wert. Der Unterschied zwischen dem verschobenen Wert und dem wahren Wert einer Größe wird manchmal "*systematischer Messabweichung*" genannt [JCGM 200:2008 (VIM) 2.17]. Nehmen wir zum Beispiel die übliche Personenwaage. Angenommen, diese ist so eingestellt, dass - wenn niemand auf der Waage steht - diese nicht Null anzeigt, sondern einen von der Null verschiedenen Wert. Egal, wie oft die Masse einer Person nun gewogen wird - diese Verschiebung würde sich immer auf den Mittelwert der Anzeigewerte auswirken. Im Allgemeinen ist eine als Größe angesehene systematische Messabweichung entweder konstant oder hängt in einer spezifischen Weise von einer anderen Größe ab.

3.5 Es gibt zwei Arten von Größen der Messabweichung: die *systematische* und die *zufällige* [JCGM 200:2008 (VIM) 2.19]. Eine *systematische Messabweichung* (von der ein Schätzwert als *Bias der Messung* bekannt ist [JCGM 200:2008 (VIM) 2.18]) hängt mit der Tatsache zusammen, dass ein Messwert eine Verschiebung enthält. Eine *zufällige Messabweichung* hängt mit der Tatsache zusammen, dass - wenn eine Messung wiederholt wird - sie einen Messwert liefern wird, der sich vom vorangegangenen Wert unterscheidet. Bei dieser Messabweichung kann man deshalb von "*zufällig*" sprechen, weil der nächste Messwert nicht genau aus den vorangegangenen Messwerten vorhergesagt werden kann (wenn dies möglich wäre, könnte man dies berücksichtigen!) Im Allgemeinen können viele verschiedene Anteile zu jeden der (beiden) Arten der Messabweichungen beitragen.

3.6 Eine Schwierigkeit beim Messen ist die Frage, wie man das, was man über die Messgröße herausgefunden hat, am besten ausdrücken kann. Ein Ansatz, nach dem man vor der Einführung des GUM oft verfuhr, sah so aus, dass die Werte der systematischen und der zufälligen Messabweichung bezogen auf die Messung ausgedrückt wurden, zusammen mit einem besten Schätzwert der Größe. Die Einführung des GUM hat aber eine neue Denkart in Bezug auf das Messen mit sich gebracht, vor allem, wenn es darum geht, die Qualität eines Messergebnisses auszudrücken. Statt das Ergebnis einer Messung durch Angabe eines besten Schätzwerts der Messgröße, zusammen mit Informationen über die Werte der systematischen und der zufälligen Messabweichung, auszudrücken (in Form einer "Fehleranalyse"), verfolgt der GUM einen anderen Ansatz: Das Ergebnis einer Messung als besten Schätzwert der Messgröße, zusammen mit einer beigeordneten *Messunsicherheit*, auszudrücken.

3.7 Der GUM-Ansatz geht von der Voraussetzung aus, dass die Qualität einer Messung charakterisiert werden kann, indem man sowohl der systematischen als auch der zufälligen Messabweichung auf einer vergleichbaren Grundlage Rechnung trägt; eine Methode hierfür wird in 7.2 vorgestellt. Bei dieser Methode wird die Information, die zuvor in einer „Fehleranalyse“ geliefert wurde, verfeinert und durch den Begriff der Messunsicherheit auf eine wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlage gestellt.

3.8 Ebenso wird beim GUM-Ansatz von der Voraussetzung ausgegangen, dass es nicht möglich ist, anzugeben, wie gut der im wesentlichen einzige wahre Wert bekannt ist, sondern nur, wie gut man glaubt, ihn zu kennen. Die Messunsicherheit kann daher als ein Maß dafür betrachtet werden, wie überzeugt man davon ist, den im wesentlichen einzigen wahren Wert der Messgröße zu kennen. Diese Unsicherheit spiegelt das unvollständige Wissen über die Messgröße wider. Der Begriff "Vertrauen" ist ein wichtiger Begriff, weil er die Metrologie zwingt, Messergebnisse mit Hilfe von *Wahrscheinlichkeiten* zu beschreiben und zu quantifizieren, die einen Grad des Vertrauens ausdrücken.

3.9 Die obige Diskussion betrifft die direkte Messung einer Größe – was übrigens selten vorkommt. Die Personenwaage mag die gemessene Dehnung einer Feder in einen Schätzwert der Messgröße – der Masse der Person, die sich auf der Waage befindet – umwandeln. Die besondere Beziehung zwischen der Dehnung und der Masse wird durch die *Kalibrierung* der Waage ermittelt [JCGM 200:2008 (VIM) 2.39].

3.10 Eine Beziehung wie die unter 3.9 beschriebene stellt eine Regel zur Umrechnung eines Größenwerts in den entsprechenden Wert der Messgröße dar. Diese Regel wird für gewöhnlich "*Modell der Messung*" oder einfach nur "*Modell*" genannt [JCGM 200:2008 (VIM) 2.48]. In der Praxis gibt es zahlreiche Arten von Messungen und daher auch viele Regeln und Modelle. Selbst für eine einzige, bestimmte Art von Messung kann es mehr als nur ein Modell geben. Ein einfaches Modell (beispielsweise eine proportionale Regel, wo die Masse proportional zur Dehnung der Feder ist) mag für den alltäglichen Hausgebrauch reichen. Ein aufwändigeres Wägungsmodell, das zusätzliche Einflüsse wie z. B. den Luftauftrieb berücksichtigt, kann hingegen bessere Ergebnisse für industrielle oder wissenschaftliche Zwecke liefern. Im allgemeinen tragen oft verschiedene Größen, wie z. B. Temperatur, Feuchte und Verschiebung, zur Definition der Messgröße bei, und dies muss gemessen werden.

3.11 Wenn die Bedingungen der Messung nicht genau so sind wie gefordert, sollten in das Modell Korrektions-

terme aufgenommen werden. Diese Terme entsprechen den Werten der systematischen Messabweichung [JCGM 200:2008 (VIM) 2.17]. Wenn ein Schätzwert eines Korrekturterms vorhanden ist, sollte die betreffende Größe um diesen Schätzwert korrigiert werden [JCGM 100:2008 (GUM) 3.2.4]. Der Schätzwert wird mit einer Unsicherheit verbunden sein, auch wenn der Schätzwert Null beträgt, was oft vorkommt. Beispiele für systematische Messabweichungen gibt es z.B. bei Höhenmessung, wenn ein Messgerät nicht perfekt senkrecht ausgerichtet ist und wenn die Umgebungstemperatur von der vorgeschriebenen Temperatur abweicht. Weder die Ausrichtung des Messgerätes noch die Umgebungstemperatur sind genau angegeben, allerdings stehen Informationen zu diesen Einflüssen zur Verfügung – z. B. die Ausrichtungsabweichung beträgt höchstens 0.001° , und die Umgebungstemperatur zum Zeitpunkt der Messung weicht von der vorgeschriebenen Temperatur um höchstens 2°C ab.

3.12 Eine Größe kann zeitabhängig sein, wie z. B. bei einem Radionuklid, das eine bestimmte Zerfallszeit hat. Ein solcher Einfluss sollte in das Modell aufgenommen werden, um eine Messgröße zu erhalten, die einer Messung zu einer bestimmten Zeit entspricht.

3.13 In einem Modell werden – außer Rohdaten, die Messwerte darstellen – häufig auch Daten anderer Art benötigt. Manche dieser Daten beziehen sich auf Größen, die physikalische Konstanten darstellen, von denen jede nur unvollständig bekannt ist. Ein Beispiel dafür sind Materialkonstanten wie z. B. der Elastizitätsmodul und die spezifische Wärme. Oft gibt es in der Literatur, in Kalibrierscheinen etc. noch weitere relevante Daten, die als Schätzwerte weiterer Größen angesehen werden.

3.14 Die Elemente, die ein Modell zur Definition einer Messgröße benötigt, sind als "*Eingangsgrößen des Modells der Messung*" bekannt [JCGM 200:2008 (VIM) 2.50]. Die Regel oder das Modell werden oft als "*Funktionsbeziehung*" bezeichnet [JCGM 100:2008 (GUM) 4.1]. Die *Ausgangsgröße des Modells der Messung* [JCGM 200:2008 (VIM) 2.51] ist die Messgröße.

3.15 Die mit Y bezeichnete Ausgangsgröße, für die Informationen benötigt werden, wird formal oft mit Hilfe eines Messmodells [JCGM 100:2008 (GUM) 4.1.1] in Form einer Messfunktion [JCGM 200:2008 (VIM) 2.49] auf Eingangsgrößen bezogen, die mit X_1, \dots, X_N bezeichnet werden und über die Informationen verfügbar sind.

$$Y = f(X_1, \dots, X_N) \quad (1)$$

3.16 Ein allgemeiner Ausdruck für ein Modell der Messung [JCGM 200:2008 (VIM) 2.48, Anmerkung 1] lautet:

$$h(Y, X_1, \dots, X_N) = 0. \quad (2)$$

Es wird davon ausgegangen, dass es ein Verfahren zur Berechnung von Y gibt, da X_1, \dots, X_N in Gleichung (2) gegeben ist, und dass Y durch diese Gleichung eindeutig definiert ist.

3.17 Die wahren Werte der Eingangsgrößen X_1, \dots, X_N sind nicht bekannt. Bei dem vorgeschlagenen Ansatz sind X_1, \dots, X_N durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen charakterisiert [JCGM 100:2008 (GUM) 3.3.5; ISO 3534-1:2006 2.11] und werden mathematisch als Zufallsgrößen betrachtet [ISO 3534-1:2006 2.10]. Diese Verteilungen beschreiben die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, dass der wahre Wert in verschiedenen Intervallen liegt und diese werden auf der Grundlage von Kenntnissen, die über X_1, \dots, X_N vorhanden sind, zugeordnet. Manchmal stehen einige oder alle X_1, \dots, X_N zueinander in Beziehung und die relevanten Verteilungen, die als *gemeinsame* bekannt sind, gelten für alle diese Größen zusammen. Die folgenden Betrachtungen, die weitestgehend für unabhängige Größen gelten, können auf zusammenhängende Größen erweitert werden.

3.18 Betrachtet man die Schätzwerte x_1, \dots, x_N der jeweiligen Eingangsgrößen X_1, \dots, X_N , die aus Zertifikaten und Berichten, Herstellerangaben, der Auswertung der Messdaten usw. stammen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die X_1, \dots, X_N charakterisieren, sind so gewählt, dass die Schätzwerte x_1, \dots, x_N jeweils die *Erwartungswerte* [JCGM 101:2008 3.6; ISO 3534-1:2006 2.12] von X_1, \dots, X_N sind. Betrachtet man außerdem eine sogenannte *Standardmessunsicherheit* [JCGM 200:2008 (VIM) 2.30] für die i -te Eingangsgröße, der das Symbol $u(x_i)$ zugeordnet wird und die als die Standardabweichung [JCGM 101:2008 3.8; ISO 3534-1:2006 2.37] der Eingangsgröße X_i definiert ist. Diese Standardmessunsicherheit wird bezeichnet als „*dem (entsprechenden) Schätzwert x_i beigeordnet*“. Der Schätzwert x_i ist dahingehend der Beste, als $u(x_i)$ kleiner ist als die erwartete quadratische Differenz zwischen X_i und jedem anderen Wert.

3.19 Das Nutzen der vorhandenen Kenntnisse, um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Charakterisierung jeder interessierenden Größe zu erstellen, gilt sowohl für X_i als auch für Y . In letzterem Fall wird die charakterisierende Wahrscheinlichkeitsverteilung für Y durch die Funktionsbeziehung (1) oder (2) zusammen mit den Wahr-

scheinlichkeitsverteilungen für X_i bestimmt. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für Y aus dieser Information ist bekannt als die *Fortpflanzung von Verteilungen* [JCGM 101:2008 5.2].

3.20 Es können auch schon vorhandene Kenntnisse, die zum wahren Wert der Ausgangsgröße Y vorliegen, berücksichtigt werden. Im Falle der privaten Personenwaage stellen die Tatsachen, dass die Masse der gewogenen Person positiv ist und dass es sich bei der gemessenen Größe um die Masse einer Person handelt und nicht um die z. B. eines Kraftfahrzeugs, Vorkenntnisse zu den möglichen wahren Werten der Messgröße in diesem Beispiel dar. Solche zusätzlichen Informationen können verwendet werden, um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für Y zu erstellen, die für Y eine kleinere Standardabweichung angibt und somit eine kleinere mit dem Schätzwert von Y verbundene Standardunsicherheit [2, 13, 24].

4 Begriffe und Grundprinzipien

4.1 Zusätzlich zu den unter 3 beschriebenen Begriffen und Grundprinzipien der Wahrscheinlichkeitstheorie, die dem vorgeschlagenen Ansatz zum Ermitteln und Ausdrücken der Messunsicherheit zugrunde liegen, können weitere Begriffe und Prinzipien dem Dokument JCGM 105:2008 entnommen werden [4].

4.2 Die Messunsicherheit ist definiert als [JCGM 200:2008 (VIM) 2.26]

nichtnegativer Parameter, der die Streuung derjenigen Werte kennzeichnet, die einer Messgröße auf der Grundlage der benutzten Information beigeordnet ist.

Diese Definition stimmt mit den Ausführungen unter 3.8 und 3.17 bis 3.20 überein.

4.3 Zwei Darstellungen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung [JCGM 101:2008 3.1; ISO 3534-1:2006 2.11] für eine Zufallsgröße X werden in der Unsicherheitsermittlung verwendet:

- die *Verteilungsfunktion* [JCGM 101:2008 3.2; ISO 3534-1:2006 2.7]: dies ist eine Funktion, die für jeden Wert ihres Arguments die Wahrscheinlichkeit angibt, dass X kleiner oder gleich diesem Wert ist, und
- die *Wahrscheinlichkeitsdichte* [JCGM 101:2008 3.3; ISO 3534-1:2006 2.26]. Hierbei handelt es sich um die Ableitung der Verteilungsfunktion.

4.4 Die Kenntnis jeder Eingangsgröße X_i in einem Modell der Messung wird oft durch den besten Schätzwert x_i und die beigeordnete Standardunsicherheit $u(x_i)$ zusammengefasst (siehe 3.18). Wenn für jedes i und j , X_i und X_j voneinander abhängig sind, wird die zusammenfassende Information auch ein Maß der Stärke dieses Verhältnisses beinhalten, das als Kovarianz [ISO 3534-1:2006 2.43] oder Korrelation angegeben wird. Wenn X_i und X_j unabhängig sind, ist ihre Kovarianz gleich 0.

4.5 Die *Auswertung von Messdaten* im Zusammenhang mit dem Modell der Messung (1) oder (2) erfolgt in folgender Weise: das Wissen, das über die Eingangsgrößen X_1, \dots, X_N vorhanden ist und in Form von Wahrscheinlichkeitsverteilungen dargestellt wird, die zu deren Charakterisierung verwendet werden, wird benutzt, um davon auf die Verteilung der Ausgangsgröße Y zu schließen, die diese charakterisiert. Die Auswertung von Messdaten kann es mit sich bringen, dass nur eine zusammenfassende Beschreibung letzterer Verteilung bestimmt wird.

4.6 Kenntnisse über eine Eingangsgröße X_i stammen entweder von wiederholt angezeigten Werten (*Ermittlungsmethode A der Messunsicherheit*) [JCGM 100:2008 (GUM) 4.2; JCGM 200:2008 (VIM) 2.28], oder sie entstammen wissenschaftlichem Urteilsvermögen oder von anderen Informationen über die möglichen Werte der Messgröße (*Ermittlungsmethode B der Messunsicherheit*) [JCGM 100:2008 (GUM) 4.3; JCGM 200:2008 (VIM) 2.29].

4.7 Bei den Ermittlungsmethoden A der Messunsicherheit [JCGM 200:2008 (VIM) 2.28] wird oft von der Annahme ausgegangen, dass die Verteilung, die eine Eingangsgröße X am Besten beschreibt, wenn wiederholte, unabhängig ermittelte Anzeigewerte vorliegen, eine Gaußsche Normalverteilung ist [ISO 3534-1:2006 2.50]. X hat dann einen Erwartungswert, der gleich dem mittleren Anzeigewert ist, und eine Standardabweichung, die gleich der Standardabweichung des Mittelwerts ist. Wenn die Messunsicherheit aus einer kleinen Anzahl von Anzeigewerten ermittelt wird (die als Beispiele für eine Anzeigegröße angenommen werden, die durch eine Gaußsche Normalverteilung charakterisiert ist), kann die entsprechende Verteilung als t-Verteilung angenommen werden [ISO 3534-1:2006 2.53]. Abbildung 1 zeigt eine Gaußsche Normalverteilung und eine t-Verteilung (gestrichelte Linie) mit vier Freiheitsgraden. Es gelten andere Betrachtungen, wenn die Anzeigewerte nicht unabhängig ermittelt worden sind.

4.8 Bei der Ermittlungsmethode B der Messunsicherheit [JCGM 200:2008 (VIM) 2.29] ist die einzige verfügbare Information oft, dass X innerhalb eines angegebenen Bereichs $[a, b]$ liegt. In diesem Fall kann die Kenntnis der Größe durch eine rechteckige Wahrscheinlichkeitsverteilung [JCGM 100:2008 (GUM) 4.3.7; ISO 3534-1:2006 2.60] mit den Grenzen a und b charakterisiert werden (Abbildung 2). Wenn andere Information verfügbar wären, würde man eine mit dieser Information übereinstimmende andere Wahrscheinlichkeitsverteilung verwenden [26].

4.9 Wenn die Eingangsgrößen X_1, \dots, X_N durch geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilungen charakterisiert worden sind und das Modell der Messung erstellt wurde, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Messgröße Y vollständig in Bezug auf diese Informationen gegeben (siehe auch 3.19). Insbesondere wird der Erwartungswert der Verteilung als der Schätzwert von Y und die Standardabweichung der Verteilung als die diesem Schätzwert beigeordnete Standardmessunsicherheit verwendet.

4.10 Abbildung 3 stellt die additive Messfunktion $Y = X_1 + X_2$ dar, und zwar in dem Fall, in dem X_1 und X_2 jeweils durch eine (unterschiedliche) rechteckige Wahrscheinlichkeitsverteilung charakterisiert sind. In diesem Fall hat Y eine symmetrische Trapezwahrscheinlichkeitsverteilung.

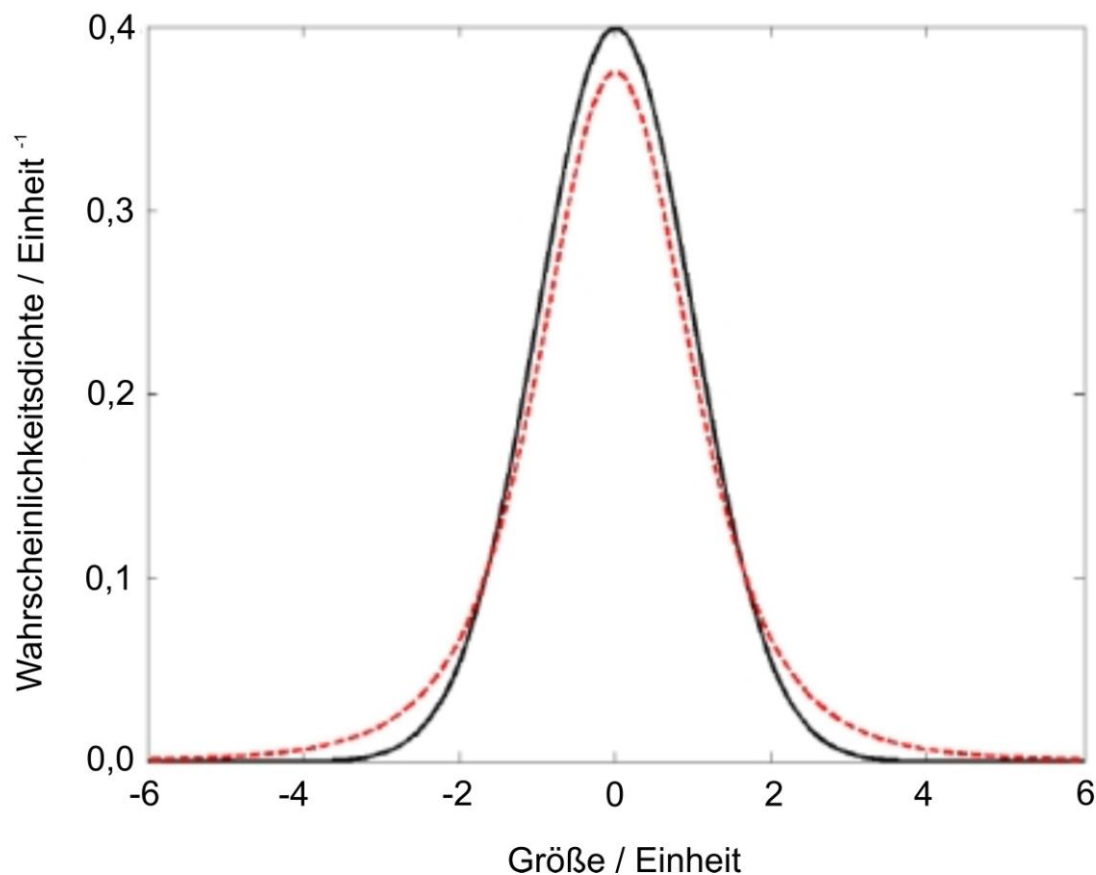


Abbildung 1 – Eine Gaußsche Normalverteilung (durchgehende schwarze Linie) und eine t-Verteilung mit vier Freiheitsgraden (gestrichelte rote Linie) (Der Begriff "Einheit" bezeichnet hier jede beliebige Einheit)

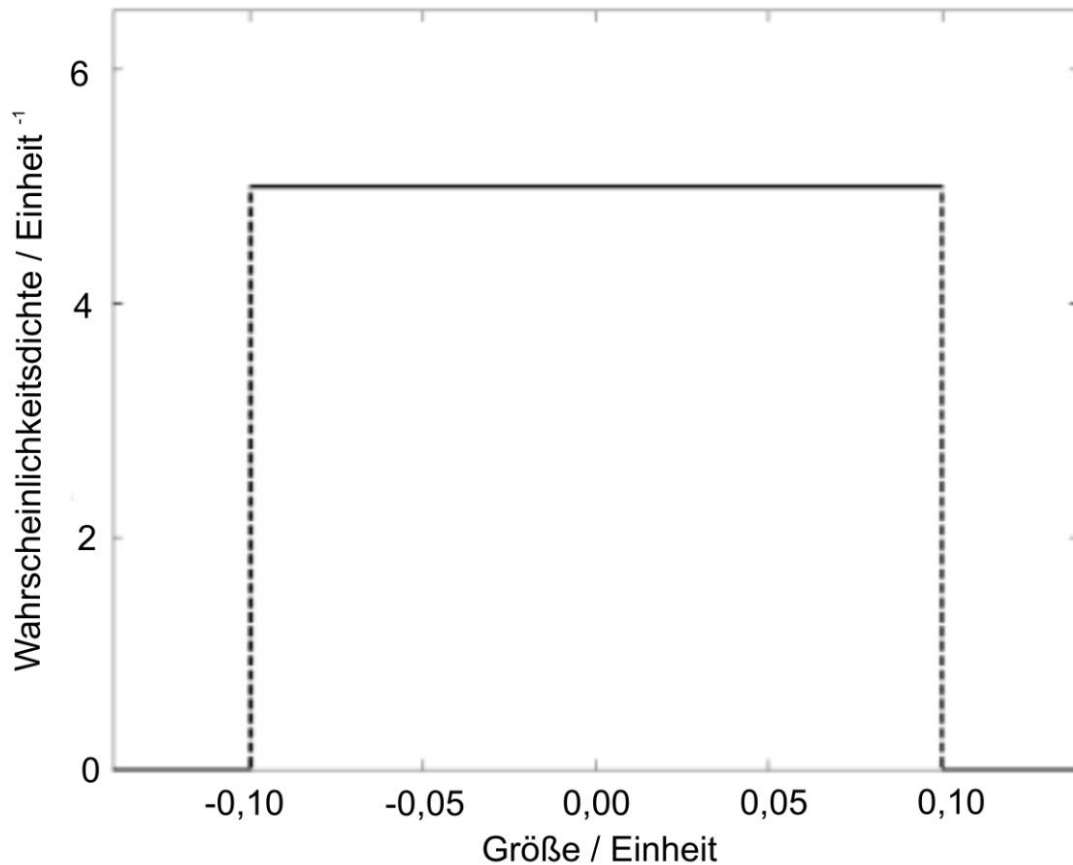


Abbildung 2 – Rechteckige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den Grenzen $-0,1$ Einheit und $0,1$ Einheit (Der Begriff "Einheit" bezeichnet hier jede beliebige Einheit)

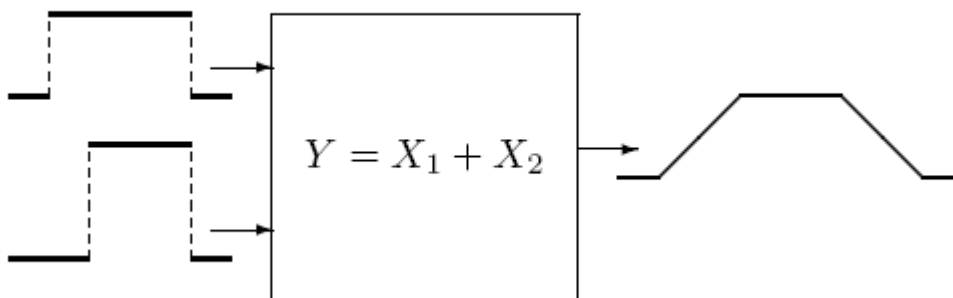


Abbildung 3 – Eine additive Messfunktion mit den zwei Eingangsgrößen X_1 und X_2 , charakterisiert durch rechteckige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

4.11 Oft wird ein Intervall benötigt, das Y mit einer angegebenen Wahrscheinlichkeit beinhaltet. Ein solches Intervall – ein sogenanntes „Überdeckungsintervall“ [JCGM 200:2008 (VIM) 2.36] – kann aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung für Y abgeleitet werden. Die angegebene Wahrscheinlichkeit ist als *Überdeckungswahrscheinlichkeit* bekannt [JCGM 200:2008 (VIM) 2.37].

4.12 Für eine gegebene Überdeckungswahrscheinlichkeit gibt es mehr als nur ein Überdeckungsintervall:

- a) das wahrscheinlichkeitstheoretisch symmetrische Überdeckungsintervall [JCGM 101:2008 3.15], für das die Wahrscheinlichkeit eines Wertes links vom Intervall gleich der Wahrscheinlichkeit eines Wertes rechts vom Intervall ist (die Summe beider Wahrscheinlichkeiten ist eins minus der Überdeckungswahr-

scheinlichkeit), und

- b) das kürzeste Überdeckungsintervall [JCGM 101:2008 3.16], dessen Weite die kleinste ist von allen möglichen Überdeckungsintervallen mit derselben Überdeckungswahrscheinlichkeit.

4.13 Abbildung 4 zeigt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (eine abgeschnittene und skalierte Gaußsche Normalverteilung, dargestellt durch die abnehmende Kurve) mit den Endpunkten der kürzesten (durchgehende blaue senkrechte Linien) und den der wahrscheinlichkeitstheoretisch symmetrischen (gestrichelte rote senkrechte Linien) 95 %-Überdeckungsintervalle für eine durch diese Verteilung charakterisierte Kenntnis einer Größe. Die Verteilung ist asymmetrisch, und die zwei Überdeckungsintervalle sind unterschiedlich (vor allem ihre rechten Endpunkte). Das kürzeste Überdeckungsintervall hat seinen linken Endpunkt bei Null, dem kleinsten möglichen Wert für die Größe. In diesem Fall ist das wahrscheinlichkeitstheoretisch symmetrische Überdeckungsintervall um 15 % länger als das kürzeste Überdeckungsintervall.

4.14 Die *Empfindlichkeitskoeffizienten* c_1, \dots, c_N [JCGM 100:2008 (GUM) 5.1.3] beschreiben, wie der Schätzwert y von Y durch kleine Änderungen in den Schätzwerten x_1, \dots, x_N der Eingangsgrößen X_1, \dots, X_N beeinflusst würde. Für die Messfunktion (1) ist c_i gleich der partiellen Ableitung erster Ordnung von f in Bezug auf X_i , ermittelt bei $X_1 = x_1, X_2 = x_2$ usw. Für die lineare Messfunktion

$$Y = c_1 X_1 + \dots + c_N X_N, \quad (3)$$

mit unabhängigen X_1, \dots, X_N würde eine Änderung von x_i um $u(x_i)$ eine Änderung $c_i u(x_i)$ in y ergeben. Diese Aussage gilt im allgemeinen für die Modelle der Messung (1) und (2) nur näherungsweise (siehe 7.2.4). Die relativen Größenordnungen der Terme $|c_i| u(x_i)$ sind hilfreich bei der Bewertung der jeweiligen Beiträge der Eingangsgrößen zu der Standardmessunsicherheit $u(y)$, die y beigeordnet ist.

4.15 Die Standardmessunsicherheit $u(y)$, die dem Schätzwert y der Ausgangsgröße Y beigeordnet ist, ergibt sich nicht aus der Summe der $|c_i| u(x_i)$, sondern aus der Kombination der quadrierten Terme [JCGM 100:2008 (GUM) 5.1.3], und nämlich (einen Ausdruck, der für die Modelle der Messung (1) und (2) im allgemeinen näherungsweise zutrifft):

$$u^2(y) = c_1^2 u^2(x_1) + \dots + c_N^2 u^2(x_N) \quad (4)$$

4.16 Wenn die Eingangsgrößen X_i Abhängigkeiten enthalten, wird Formel (4) durch Terme, die Kovarianzen enthalten, erweitert [JCGM 100:2008 (GUM) 5.2.2], was zu einer Zu- bzw. Abnahme von $u(y)$ führen kann.

4.17 Gemäß Resolution 10 der 22. CGPM (2003) " ... ist das Symbol des Dezimalzeichens entweder ein Punkt auf der Linie oder ein Komma auf der Linie ... ". Für seine Dokumente auf englisch hat das JCGM sich für den Punkt auf der Linie entschieden. In den deutschen Fassungen der Dokumente wird dagegen das Komma benutzt.

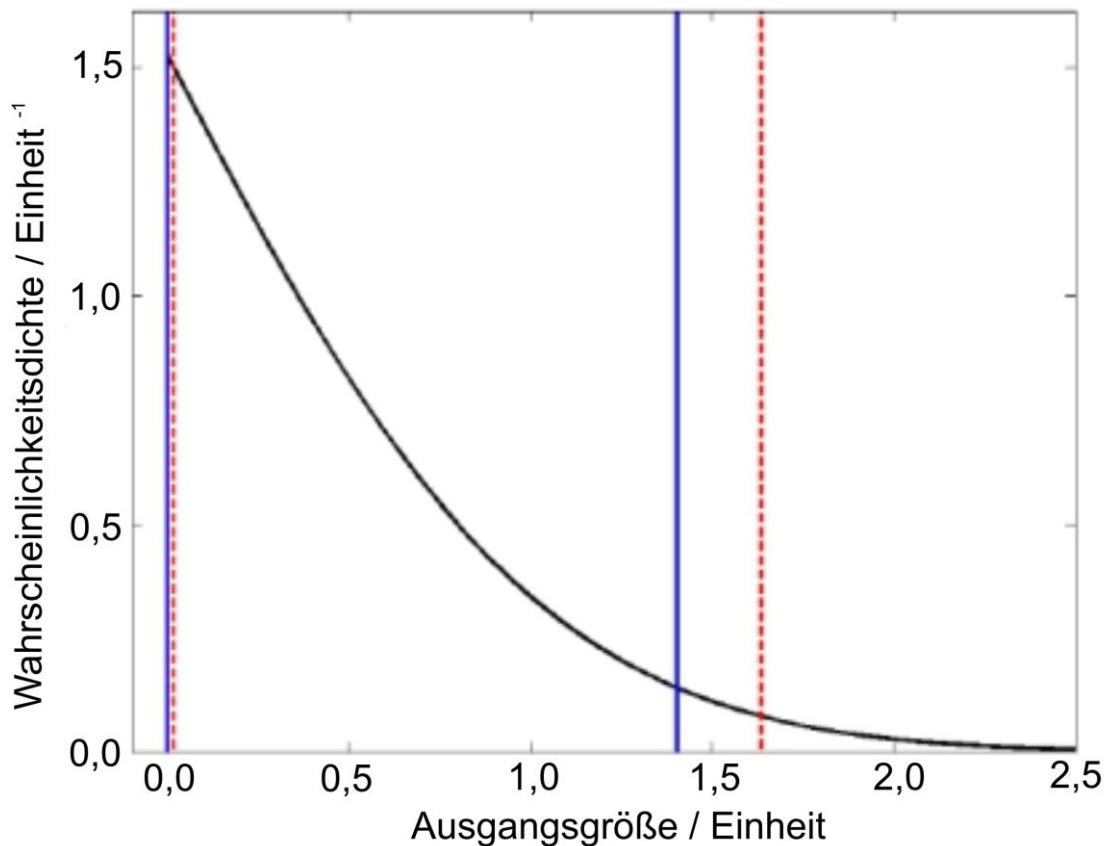


Abbildung 4 – Kürzestes 95 %-Überdeckungsintervall (Endpunkte angezeigt durch durchgehende blaue senkrechte Linien) und wahrscheinlichkeitstheoretisch symmetrisches 95 %-Erweiterungsintervall (rot gestrichelt) für eine durch eine abgeschnittene und skalierte Gaußsche Normalverteilung charakterisierte Messgröße (Der Begriff "Einheit" bezeichnet hier jede beliebige Einheit)

5 Schritte der Messunsicherheitsermittlung

5.1 Die wichtigsten Schritte bei der Messunsicherheitsermittlung sind die Formulierung und die Berechnung, wobei sich letzteres aus Fortpflanzung und Zusammenfassung zusammensetzt.

5.2 Die Formulierungsphase (siehe Abschnitt 6) besteht aus:

- a) der Definition der Ausgangsgröße Y (der Messgröße),
- b) der Festlegung der Eingangsgrößen, von denen Y abhängig ist,
- c) der Entwicklung eines Modells der Messung, das Y zu den Eingangsgrößen in Bezug setzt, und
- d) der Zuordnung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Gauß, Rechteck usw.) zu Eingangsgrößen (bzw. gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei Eingangsgrößen, die nicht unabhängig sind) auf der Grundlage vorhandenen Wissens.

5.3 Die Berechnungsphase (siehe Abschnitt 7) besteht aus der Fortpflanzung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Eingangsgrößen durch das Modell der Messung, um die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Ausgangsgröße Y zu erhalten, und der Zusammenfassung unter Verwendung dieser Verteilung, um folgendes zu erhalten:

- a) den Erwartungswert der Verteilung für Y als Schätzwert y von Y ,

- b) die Standardabweichung der Verteilung für Y als die Standardmessunsicherheit $u(y)$, die y beigeordnet ist [JCGM 100:2008 (GUM) E.3.2], und
- c) ein Überdeckungsintervall, das Y mit einer festgelegten Überdeckungswahrscheinlichkeit enthält.

6 Die Formulierungsphase: Entwicklung eines Modells der Messung

6.1 Zur Formulierungsphase einer Messunsicherheitsermittlung gehört die Entwicklung eines Modells der Messung, einschließlich eventueller Korrekturen und sonstiger Einflüsse. In manchen metrologischen Bereichen kann sich diese Phase als überaus schwierig erweisen. Zu dieser Phase gehört auch, schon vorhandenes Wissen zu nutzen, um die Eingangsgrößen im Modell mittels Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu charakterisieren. JCGM 103 [6] gibt dabei Hilfestellung, ein Modell der Messung zu entwickeln und damit zu arbeiten. Wie in einem Modell der Messung den Eingangsgrößen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zugeordnet werden, ist in JCGM 101 [JCGM 101:2008 6] und JCGM 102 [5] erläutert.

6.2 Am Anfang wird ein Modell der Messung entwickelt, das die Eingangsgrößen mit der Ausgangsgröße in Beziehung setzt. Es kann mehr als eine Ausgangsgröße geben (siehe 6.5). Das Modell wird auf theoretischer oder empirischer Grundlage entwickelt - oder auf beiden Grundlagen - und ist für gewöhnlich vom metrologischen Bereich abhängig, wie dem elektrischen, dimensional, thermischen oder massebezogenen usw. Das Modell wird dann durch Terme erweitert, die weitere Eingangsgrößen darstellen, welche Einflüsse beschreiben, die sich auf die Messung auswirken. In JCGM 103 [6] wird ausgeführt, wie diese zusätzlichen Einflüsse, die in zufällige und systematische Einflüsse eingeteilt werden können, zu handhaben sind.

6.3 Im JCGM 103 werden die Messmodellklassen breiter gefasst als beim GUM, wobei die Modelle dahingehend unterschieden werden,

- a) ob die beteiligten Größen real oder komplex sind,
- b) ob das Modell der Messung die allgemeine Form (2) annimmt oder ob es als eine Messfunktion (1) ausgedrückt werden kann, und
- c) ob es eine einzige oder mehr als eine Ausgangsgröße gibt (siehe 6.5).

In Kategorie (a) treten komplexwertige Größen vor allem im Bereich der elektrischen, aber auch der akustischen und optischen Messtechnik auf. In Kategorie (b) wird im Falle einer Messfunktion die Ausgangsgröße direkt als Formel ausgedrückt, die die Eingangsgrößen umfasst. Im Falle eines allgemeinen Messmodells wird die Ausgangsgröße unter Verwendung einer Gleichung aus den Eingangsgrößen ermittelt (siehe 6.5).

6.4 Es werden Beispiele aus einer Reihe von metrologischen Bereichen gegeben, die verschiedene Aspekte des Dokuments JCGM 103 deutlich machen. Es werden Hinweise zur numerischen Analyse dieser Beispiele gegeben. Weitere Hinweise beziehen sich auf die geeignete Ersetzung vorliegender Größen durch solche, die entweder alle oder aber zum Teil nicht oder nur schwach korreliert sind.

6.5 Der GUM und JCGM 101:2008 konzentrieren sich auf Modelle der Messung in Form von Messfunktionen, die eine einzige Ausgangsgröße Y haben. Bei vielen Messproblemen gibt es aber mehr als nur eine Ausgangsgröße, die von einem gemeinsamen Satz Eingangsgrößen abhängen. Diese Ausgangsgrößen werden mit Y_1, \dots, Y_m bezeichnet. Beispiele sind: (a) eine Ausgangsgröße, die komplex ist und bezüglich ihrer realen und imaginären Komponente (bzw. Betrag und Phase) dargestellt wird, (b) Größen, die die Parameter einer Kalibrierfunktion darstellen, und (c) Größen, die die Geometrie der Oberfläche eines Artefakts beschreiben. Der GUM behandelt solche Modelle nicht direkt, doch werden Beispiele zur gleichzeitigen Wirk- und Blindwiderstandsmessung [JCGM 100:2008 (GUM) H.2] und zur Kalibrierung eines Thermometers [JCGM 100:2008 (GUM) H.3] gegeben.

6.6 Die Formulierungsphase der Messunsicherheitsermittlung für den Fall, dass es mehr als eine Messgröße gibt, ist die gleiche wie die für ein Messmodell, bei dem es nur eine einzige Messgröße gibt: es erfolgt die Entwicklung eines Modells, und den Eingangsgrößen werden auf der Grundlage von vorhandenem Wissen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zugeordnet. Wie bei dem Messmodell mit einer einzigen Ausgangsgröße, gibt es für jede Eingangsgröße einen Schätzwert und eine Standardmessunsicherheit zu diesem Schätzwert (und eventuell Kovarianzen zu Paaren von Schätzwerten). Da im allgemeinen außerdem jede Ausgangsgröße von allen Eingangsgrößen abhängig ist, ist es notwendig, zusätzlich zur Ermittlung der Schätzwerte dieser Ausgangsgrößen und der Standardmessunsicherheiten zu diesen Schätzwerten die Kovarianzen zu allen Paaren dieser Schätzwerte zu ermitteln.

6.7 Das Gegenstück der Messfunktion (1) für eine Anzahl m von Ausgangsgrößen ist

$$Y_1 = f_1(X_1, \dots, X_N), Y_2 = f_2(X_1, \dots, X_N), \dots, Y_m = f_m(X_1, \dots, X_N), \quad (5)$$

Hierin gibt es m Funktionen f_1, \dots, f_m . In Abbildung 5 ist eine solche Messfunktion dargestellt.

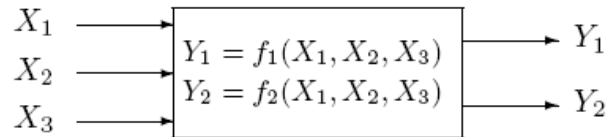


Abbildung 5 – Eine Messfunktion mit den drei Eingangsgrößen X_1 , X_2 und X_3 und den zwei Ausgangsgrößen Y_1 und Y_2

6.8 *Mehrstufige Messmodelle*, bei denen die Ausgangsgrößen der vorangegangenen Stufen zu den Eingangsgrößen der nachfolgenden Stufen werden, behandelt das Dokument JCGM 103 ebenfalls. Ein Beispiel für ein mehrstufiges Messmodell ist die Aufstellung und Anwendung einer Kalibrierfunktion [JCGM 200:2008 (VIM) 2.39] (siehe Abb. 6):

- a) Auf der Grundlage von Größenwerten, die von Messnormalen und entsprechenden Anzeigewerten eines Messsystems geliefert wurden, werden Schätzwerte für die Parameter der Kalibrierfunktion ermittelt. Die den Messwerten und den Anzeigewerte beigeordneten Standardmessunsicherheiten führen zu Standardmessunsicherheiten, die diesen Schätzwerten beigeordnet sind und im allgemeinen Fall zu Kovarianzen, die mit allen Paaren dieser Schätzwerte verbunden sind.
- b) Bei einem weiteren Anzeigewert wird die Kalibrierfunktion benutzt, um den entsprechenden Messwert zu erhalten. Bei diesem Schritt wird die Kalibrierfunktion umgekehrt. Die den Schätzwerten der Parameter der Kalibrierfunktion beigeordneten Standardmessunsicherheiten und Kovarianzen führen - zusammen mit der dem weiteren Anzeigewert beigeordneten Standardmessunsicherheit - zu einer Standardmessunsicherheit, die dem gemessenen Größenwert beigeordnet ist.

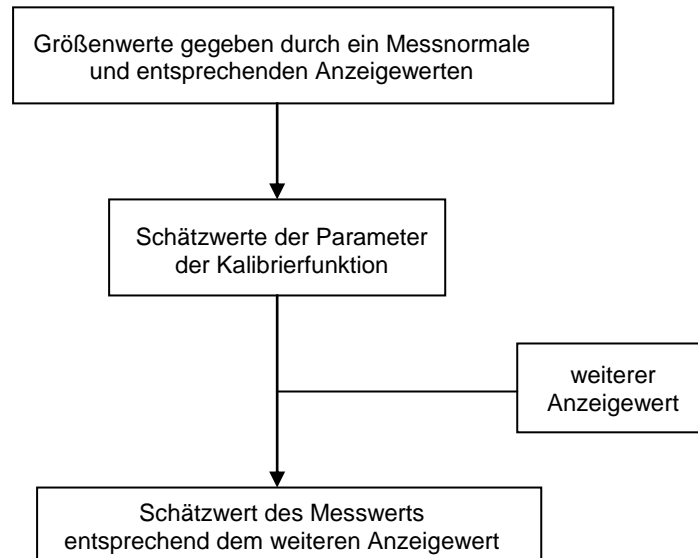


Abbildung 6 – Ein Zweistufen-Messmodell für eine Kalibrierfunktion, bei der (zunächst) die Größenwerte, die von Messnormalen und entsprechenden Anzeigewerten geliefert wurden, verwendet werden, um Schätzwerte der Parameter der Kalibrierfunktion zu ermitteln; diese Kalibrierfunktion wird (anschließend) verwendet, um den Messwert eines weiteren Anzeigewerts zu schätzen.

7 Die Berechnungs- (Fortpflanzungs- und Zusammenfassungs-) phase der Unsicherheitsermittlung

7.1 Allgemeines

7.1.1 Der Vorgang der Fortpflanzung bei der Unsicherheitsermittlung ist als die *Fortpflanzung von Verteilungen* bekannt [JCGM 101:2008 5.2], für die es verschiedene Ansätze gibt, unter anderem:

- den Methoden des GUM, die darin bestehen, das Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz anzuwenden und die Ausgangsgröße Y durch eine Gaußsche Normal- oder eine t-Verteilung zu charakterisieren (siehe [7.2](#)),
- analytische Methoden, bei denen eine mathematische Analyse zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für Y in algebraischer Form führt (siehe [7.3](#)), und
- eine Monte-Carlo-Methode (MCM), bei der eine Näherung der Verteilungsfunktion für Y numerisch erfolgt, indem aus den Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Eingangsgrößen zufällige Ziehungen durchgeführt werden, und die Auswertung des Modells bei diesen Werten erfolgt (siehe [7.4](#)).

7.1.2 Für jedes Problem der Unsicherheitsermittlung werden entweder Ansatz a), b) oder c) verwendet (bzw. irgendein anderer Ansatz), wobei a) üblicherweise eine Näherung ist, b) exakt ist und c) eine Lösung mit einer numerischen Genauigkeit bietet, die überprüft werden kann.

7.1.3 Die Anwendung der Ansätze a) und c) auf Messfunktionen mit einer beliebigen Anzahl von Ausgangsgrößen und allgemeine Messmodelle wird unter Punkt [7.5](#) behandelt.

7.2 Die Methode des GUM

7.2.1 Die Methode des GUM (GUF) [JCGM 100:2008 (GUM) 3.4.8, 5.1] (dargestellt in Abb. 7) verwendet

- die besten Schätzwerte x_i der Eingangsgrößen X_i ,
- die den x_i beigeordneten Standardunsicherheiten $u(x_i)$, und
- die Empfindlichkeitskoeffizienten c_i (siehe [4.14](#)),

um einen Schätzwert y der Ausgangsgröße Y und der beigeordneten Standardunsicherheit $u(y)$ zu bilden.

7.2.2 Eine Variante [JCGM 100:2008 (GUM) 5.2] von 7.2.1 gilt, wenn die Eingangsgrößen voneinander abhängig sind (dies ist in Abb. 7 nicht dargestellt). Indem man die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Y als Gaußsche Normalverteilung ansieht, wird auch ein Überdeckungsintervall für Y ermittelt, das einer angegebenen Überdeckungswahrscheinlichkeit entspricht [JCGM 100:2008 (GUM) G.2]. Wenn die Freiheitsgrade [ISO 3534-1:2006 2.54], die sich auf jedes $u(x_i)$ beziehen, endlich sind, wird ein (effektiver) auf $u(y)$ bezogener Freiheitsgrad bestimmt, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Y wird als t-Verteilung angenommen.

7.2.3 Die Methode des GUM [JCGM 100:2008 (GUM) 5] können in vielen Fällen angewendet werden und führen zu gültigen Unsicherheitsaussagen. Wenn die Funktion der Messung bezüglich der Eingangsgrößen linear ist und die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für diese Größen normalverteilt sind, liefert die Methode des GUM exakte Ergebnisse [JCGM 101:2008 5.7]. Aber auch wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, kann der Ansatz – zumindest für praktische Zwecke – ausreichend genau sein [JCGM 101:2008 5.8].

7.2.4 Unter manchen Bedingungen kann es passieren, dass die Methode des GUM nicht erfüllt sind, unter anderem wenn

- a) die Messfunktion nicht linear ist,
- b) die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Eingangsgrößen asymmetrisch sind,
- c) die Unsicherheitsbeiträge $|c_1|u(x_1), \dots, |c_N|u(x_N)$ (siehe 4.14) nicht von ungefähr der gleichen Größenordnung sind [JCGM 100:2008 (GUM) G.2.2], und
- d) die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Ausgangsgröße asymmetrisch oder wenn sie weder eine Gaußsche Normalverteilung noch eine t-Verteilung ist.

Es ist manchmal schwierig, im Voraus zu erkennen, ob die zur Anwendung des GUM notwendigen Bedingungen bzw. Voraussetzungen auch wirklich erfüllt sind.

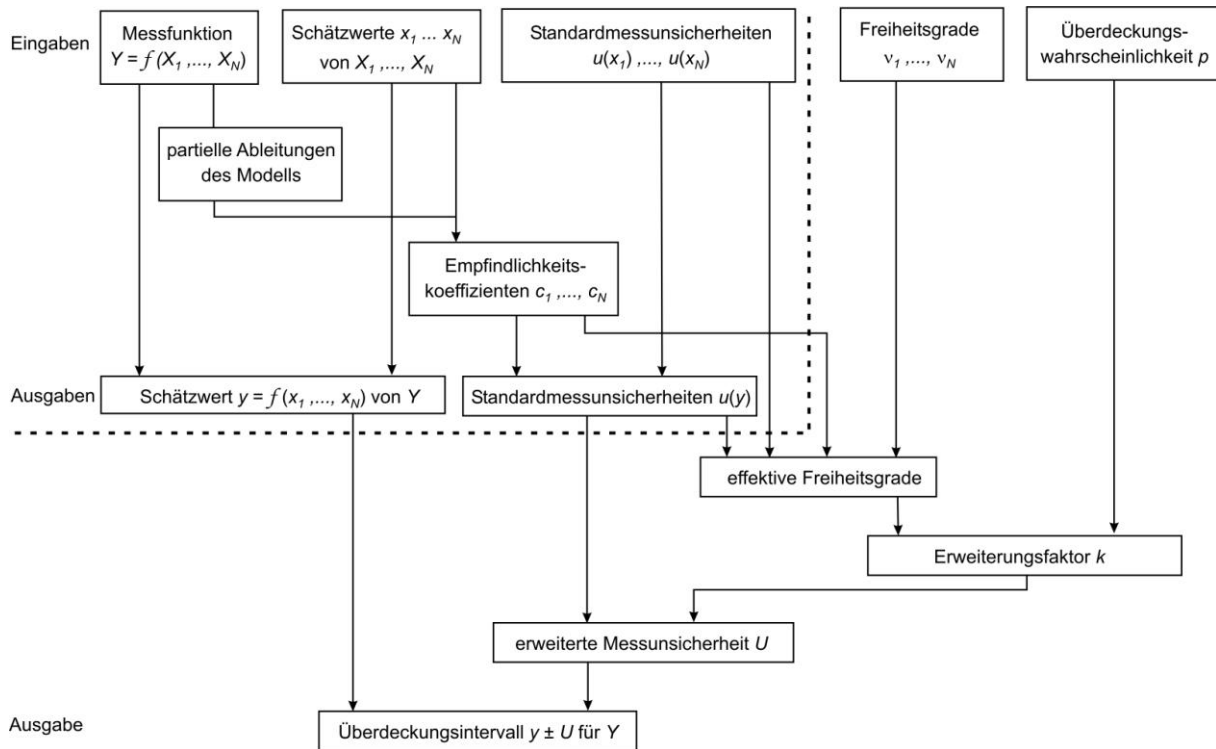


Abbildung 7 – Messunsicherheitsermittlung anhand der Methode des GUM, wobei der obere linke Teil der Abbildung (durch gestrichelte Linien eingegrenzt) sich auf die Ermittlung eines Schätzwerts y der Ausgangsgröße Y und der beigeordneten Standardunsicherheit $u(y)$ bezieht, während die anderen Teile sich auf die Bestimmung eines Überdeckungsintervalls für Y beziehen.

7.2.5 Die Anwendung der Methode des GUM stellen sich als schwieriger heraus, wenn es darum geht, partielle Ableitungen (oder numerische Näherungen zu diesen) für ein kompliziertes Modell der Messung zu erstellen, wie es beim Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz erforderlich ist (eventuell mit Termen höherer Ordnung) [JCGM 100:2008 (GUM) 5]. Ein gültige und manchmal leichter anwendbare Methode erhält man durch die Anwendung einer geeigneten Monte-Carlo-Methode zur Berechnung der Fortpflanzung von Verteilungen (siehe 7.4).

7.3 Analytische Methoden

7.3.1 Analytische Methoden, durch die man eine algebraische Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Ausgangsgröße erhält, führen keine Näherung ein und sind daher nur in relativ einfachen Fällen anwendbar. Darstellungen solcher Methoden sind verfügbar [8, 12]. Einige Fälle, die für eine allgemeine Anzahl N von Eingangsgrößen auf diese Weise behandelt werden können, sind lineare Messfunktionen (Ausdruck (3)), wobei die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für alle Eingangsgrößen Gauß-Verteilungen oder Rechteckverteilungen derselben Breite sind. Ein Beispiel mit zwei Eingangsgrößen ($N = 2$), für die die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Eingangsgrößen rechteckig und die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Ausgangsgröße trapezförmig [10] ist, ist in Abb. 3 dargestellt.

7.3.2 Fälle, bei denen es eine Eingangsgröße ($N = 1$) gibt, können oft analytisch anhand einer Formel [25, S. 57-61] behandelt werden, um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Ausgangsgröße algebraisch abzuleiten. Solche Fälle können bei der Umwandlung von Maßeinheiten – z. B. von linear zu logarithmisch – vorkommen [10, S. 95-98].

7.3.3 Eine algebraische Lösung hat den Vorteil, dass sie einen Einblick dadurch verschafft, dass sie die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Ausgangsgröße von Parametern der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Eingangsgrößen aufzeigt.

7.4 Monte-Carlo-Methode

7.4.1 Das Dokument JCGM 101:2008 liefert detaillierte Informationen zur Monte-Carlo-Methode zur numerische

Realisierung der Fortpflanzung von Verteilungen [JCGM 101:2008 5.9]. Für die Anwendung der Monte-Carlo-Methode gibt es weniger Bedingungen als bei den Methode des GUM (GUF) [JCGM 101:2008 5.10]. Die Monte-Carlo-Methode ist in Abbildung 8 dargestellt. Das Dokument JCGM 101:2008 gibt Beispiele, um die Monte-Carlo-Methode mit der Anwendung der Methode des GUM (GUF) zu vergleichen [JCGM 101:2008 9].

7.4.2 JCGM 101:2008 bietet ein adaptives Monte-Carlo-Verfahren, bei dem die Anzahl der Monte-Carlo-Ziehungen automatisch durch die Verwendung eines Konvergenzmaßes des gesamten Verfahrens [JCGM 101:2009 7.9] bestimmt wird.

7.4.3 JCGM 101:2008 enthält ein Verfahren, das MCM nutzt, um zu entscheiden, ob die Anwendung der Methode des GUM in einem bestimmten Einzelfall zulässig ist [JCGM 101:2008 8].

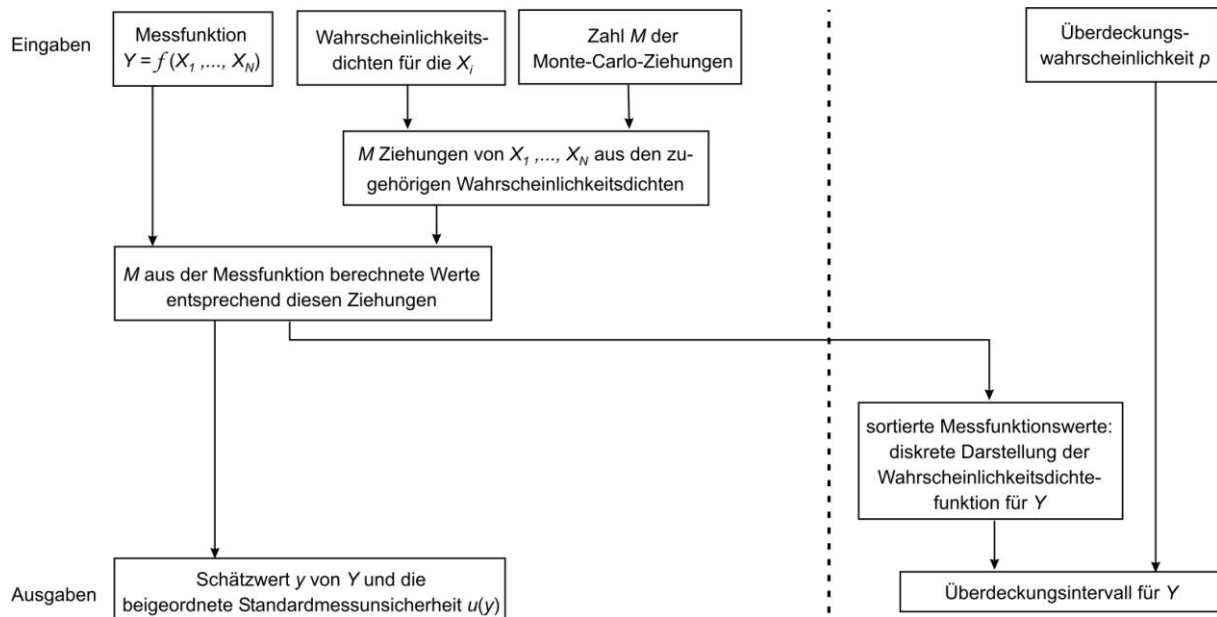


Abbildung 8 – Messunsicherheitsermittlung anhand einer Monte-Carlo-Methode, wobei der Teil der Abbildung, der sich links von der gestrichelten Linie befindet, sich auf die Ermittlung eines Schätzwerts y der Ausgangsgröße Y und der damit zusammenhängenden Standardunsicherheit $u(y)$ bezieht, während die anderen Teile sich auf die Bestimmung eines Überdeckungsintervalls für Y beziehen.

7.5 Messmodelle mit einer beliebigen Anzahl von Ausgangsgrößen

7.5.1 Zur Ermittlung der Unsicherheiten und Kovarianzen, die mit Schätzwerten der Ausgangsgrößen für Messmodelle mit einer beliebigen Anzahl von Ausgangsgrößen verbunden sind, bedürfen sowohl die Methode des GUM als auch die MCM - wie sie in JCGM 101:2008 behandelt wird - einer Erweiterung. Der GUM [JCGM 100:2008 (GUM) F.1.2.3] skizziert eine solche Erweiterung der Methode des GUM. Weitere Betrachtungen hierzu erfolgen jedoch lediglich in Form von Beispielen.

7.5.2 JCGM 102 [5] sagt, dass das Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz, das ein Hauptbestandteil der Methode des GUM ist, durch eine äquivalent kurze Matrixformulierung ausgedrückt werden kann, wenn es auf ein Messmodell angewendet wird, das eine einzige Ausgangsgröße hat. Das Matrix-Format hat den Vorteil, dass es sich als Basis für die Anwendung in Software eignet und dass es auf allgemeinere Messmodelltypen ausgeweitet werden kann.

7.5.3 Eine derartige Erweiterung erfolgt im JCGM 102 für eine Messfunktion mit einer beliebigen Anzahl von Ausgangsgrößen². Die Erweiterung auf eine beliebige Anzahl von Ausgangsgrößen in einem allgemeinen Messmodell (siehe 3.16) wird ebenfalls in JCGM 102 abgehandelt.

7.5.4 Das Dokument JCGM 102 wendet auch MCM auf Messmodelle mit einer beliebigen Anzahl von Ausgangsgrößen an. Es enthält eine diskrete Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Ausgangsgrößen. Im Rahmen dieser Darstellung werden Ausdrücke für die Schätzwerte der Ausgangsgrößen, die Standardunsicher-

² Hier muss etwas im englischen Originaltext geändert werden: Eine Messfunktion hat keine Ausgangsgröße.

heiten, die mit diesen Schätzwerten verbunden sind, und die Kovarianzen, die mit Paaren dieser Schätzwerte verbunden sind, angegeben.

7.5.5 Zusätzlich zur Ermittlung von Schätzwerten der Ausgangsgrößen zusammen mit den beigeordneten Standardunsicherheiten und Kovarianzen kann es erforderlich sein, einen Bereich zu ermitteln, der die Ausgangsgrößen mit einer festgelegten (Überdeckungs)wahrscheinlichkeit enthält. Es ist natürlich, eine Ausweitung des wahrscheinlichkeitstheoretisch symmetrischen Überdeckungsintervalls und des kürzesten Überdeckungsintervalls auf Regionen in Erwägung zu ziehen. Es gibt jedoch kein natürliches Pendant zum wahrscheinlichkeitstheoretisch symmetrischen Überdeckungsintervall in Form einer Überdeckungsregion, während es zum kürzesten Überdeckungsintervall sehr wohl eines gibt. Die Bestimmung einer kleinsten Überdeckungsregion ist für gewöhnlich eine schwierige Aufgabe.

7.5.6 Unter bestimmten Bedingungen kann es sinnvoll sein, eine *approximative* Überdeckungsregion von einfacher geometrischer Form anzugeben. In diesem Zusammenhang werden zwei besondere Formen von Überdeckungsregionen in Betracht gezogen. Eine dieser Formen ergibt sich aus der Charakterisierung der Ausgangsgrößen durch eine gemeinsame Gaußsche Normalverteilung, z. B. auf der Basis des zentralen Grenzwertsatzes [JCGM 100:2008 (GUM) G.2], bei dem die kleinste Überdeckungsregion durch ein Hyperellipsoid abgegrenzt ist. Die andere Form besteht aus einer hyperrechteckigen Überdeckungsregion. Verfahren zur Gewinnung dieser Formen können JCGM 102 entnommen werden.

8 Messunsicherheit in der Konformitätsbewertung

8.1 Die Konformitätsbewertung ist ein wichtiger Bereich für Qualitätskontrollen in der Produktion, für das gesetzliche Messwesen und die Erhaltung der Gesundheit und Sicherheit. Bei der industriellen Kontrolle von Fertigungsteilen wird entschieden, ob diese Teile mit den Fertigungsspezifikationen übereinstimmen. Ähnliche Fragen ergeben sich im Bereich der Regulierung (in Bezug auf Emissionen, Strahlung, Medikamente, Anti-Doping-Kontrollen, usw.), wenn es darum geht, herauszufinden, ob die festgelegten Grenzen für die wahren Werte einer Größe überschritten worden sind. Dazu gibt JCGM 106 Hinweise [7]. Siehe hierzu auch [18].

8.2 Konformitätsbewertung geht mit Messen einher, wenn es darum geht zu entscheiden, ob die Ausgangsgröße oder Messgröße eine bestimmte Anforderung erfüllt. Im Falle einer einzelnen Größe sieht eine solche Anforderung meist so aus, dass Spezifikationsgrenzen festgelegt werden, die ein Intervall von zulässigen Größenwerten definieren. Bei Nichtvorhandensein von Unsicherheit wird ein Messwert, der innerhalb dieses Intervalls liegt, als konform angesehen, ansonsten als nicht-konform. Der Einfluss der Messunsicherheit auf das Kontrollverfahren macht es erforderlich, die Risiken zwischen Herstellern und Verbrauchern sinnvoll zu verteilen.

8.3 Die Wahrscheinlichkeiten möglicher Werte einer interessierenden Größe Y werden anhand einer Wahrscheinlichkeitsverteilung dargestellt. Die Wahrscheinlichkeit, dass Y der Spezifikation entspricht, kann anhand dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Spezifikationsgrenzwerte errechnet werden.

8.4 Da das Wissen über die Größe Y - wie in ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilung dargestellt - unvollständig ist, besteht das Risiko, dass eine falsche Entscheidung bezüglich der Erfüllung bzw. Nichterfüllung der Spezifikation getroffen wird. Solche falschen Entscheidungen können in zweierlei Weise auftreten: Eine Größe, die als spezifikationsgemäß bezeichnet und akzeptiert worden ist, könnte in Wirklichkeit nicht-spezifikationsgemäß sein, und eine als nicht-spezifikationsgemäß bewertete, abgelehnte Größe könnte in Wirklichkeit spezifikationsgemäß sein. Die damit verbundenen Risiken werden jeweils *Verbraucherrisiko* und *Herstellerrisiko* genannt (siehe JCGM 106).

8.5 Durch die Festlegung eines *Akzeptanzintervalls* von annehmbaren Messwerten können Risiken ausgeglichen werden, die sich ergeben, wenn eine falsche Entscheidung bezüglich einer Annahme oder Ablehnung getroffen wurde, und die damit verbundenen Kosten können auf ein Mindestmaß begrenzt werden [19]. Das Problem der Berechnung der Konformitätswahrscheinlichkeit und der Wahrscheinlichkeiten der oben beschriebenen zwei Arten von falschen Entscheidungen aufgrund der Wahrscheinlichkeitsverteilung, der Spezifikationsgrenzen und des Akzeptanzintervalls werden in JCGM 106 behandelt. Wie die Grenzen des Akzeptanzintervalls gewählt werden, hängt davon ab, welche Folgen sich eventuell aus den falschen Entscheidungen ergeben.

8.6 In [8.3](#) bis [8.5](#) wird nur auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung allgemeiner Art eingegangen. In dem Dokument JCGM 106 hingegen wird detailliert auf den wichtigsten Fall in der Praxis - die Gaußsche Verteilung - eingegangen.

9 Anwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

9.1 Hinweise zur Anwendung der *Methode der kleinsten Fehlerquadrate* (auch unter der Bezeichnung "*Anpassung der kleinsten Fehlerquadrate*" bekannt) auf Datenermittlungsprobleme in der Metrologie können JCGM 107 entnommen werden [3]. Solchen Problemen liegt oft ein theoretischer Zusammenhang zwischen einer unabhängigen und einer abhängigen Variablen zugrunde. Dieser Zusammenhang stellt die Grundlage einer Parameteranpassung oder eines Anpassungsproblems dar. Die Eingangsgrößen im entsprechenden Messmodell sind die Größen, die sich aus den gemessenen Werten der unabhängigen und abhängigen Variablen ergeben. Die Ausgangsgrößen sind die Größen, die die erforderlichen Parameter darstellen. Die Art und Weise, in der die Ausgangsgrößen durch ein Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate aus den Eingangsgrößen gewonnen werden, definiert das Messmodell.

9.2 In der Terminologie der Kalibrierung (siehe 6.8) wäre der Messwert einer unabhängigen Variablen typischerweise der eines Normals. Der Wert der abhängigen Variablen wäre ein Anzeigewert, der vom Messsystem für den entsprechenden Wert der unabhängigen Variablen geliefert würde. Im Anpassungskontext, der die Kalibrierung als einen Sonderfall enthält, ist das in JCGM 107 verwendete Anpassungsverfahren eine verallgemeinerte Version der herkömmlichen Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

9.3 Die Aufgabe ist es, die Parameter (und manchmal sogar ihre Anzahl) aus Paaren von Messwerten und den entsprechenden Anzeigewerten zu schätzen. Diese Paare, zusammen mit den beigeordneten Standardunsicherheiten und ggf. Kovarianzen, stellen die Eingangsdaten der Anpassung dar.

9.4 Zu den typischen Messproblemen, auf die das Dokument JCGM 107 angewendet werden kann, gehören: (a) lineare oder nicht-lineare Anpassungsprobleme einschließlich des Falles, dass Werte der unabhängigen Variablen nicht vollständig bekannt sind, und (b) Anpassungen von allgemeinen Modellen zur Schätzung von Parametern in einem physikalischen Prozess. Das Dokument JCGM 107 ist nicht nur ausschließlich auf Anpassungsprobleme anzuwenden. Es kann auch angewendet werden, um z. B. Faltungsprobleme zu behandeln [21], oder bei der Anpassung von Naturkonstanten [22] und bei der Ermittlung von Daten bei Ringvergleichen [9].

9.5 Bei Problemen des Typs (a) (unter 9.4 beschrieben) wird das Messsystem, nachdem die Methode der kleinsten Fehlerquadrate zur Schätzung der Parameter einer Kalibrierfunktion und zur Ermittlung der Standardunsicherheiten und Kovarianzen angewendet worden ist, nachträglich zur Messung verwendet. Die Schätzwerte der Parameter der Kalibrierfunktion werden dann, zusammen mit einem bestimmten Anzeigewert, verwendet, um die entsprechende Größe zu schätzen. Die diesem Schätzwert beigeordneten Standardunsicherheit wird mittels der den Parameterschätzwerten zuzuordnenden Standardunsicherheiten und Kovarianzen und der dem Anzeigewert zuordnenden Standardunsicherheit ermittelt.

9.6 In JCGM 107 wird betont, dass die *Unsicherheitsstruktur* bei der Formulierung und Lösung des Problems der kleinsten Fehlerquadrate in vollem Umfang berücksichtigt werden sollte. Der Begriff "Unsicherheitsstruktur" bezieht sich auf die mit den Mess- und Anzeigewerten verbundenen Standardunsicherheiten und auf eventuelle mit Paaren dieser Werte verbundenen Kovarianzen.

9.7 Bei Problemen des Typs (b) (unter 9.4 beschrieben), oder wenn die Parameter in Problemen zu bestimmen sind, die unter den Typ (a) fallen, ist das Anpassungsproblem selten ein Problem in nur einer einzigen Ausgangsgröße. Es betrifft eher eine Reihe von Ausgangsgrößen, bei denen die mathematische Formulierung bequemer in Matrizenform ausgedrückt werden kann. JCGM 107 macht reichlich Gebrauch von Matrixformalismus, welcher sich zur numerischen Lösung mit Hilfe eines Computers gut eignet, wie es in der Praxis für gewöhnlich auch erforderlich ist (siehe auch 7.5).

A Akronyme und Initialwörter

Akronyme und Initialwörter, die in diesem Dokument verwendet wurden, sind in der Tabelle A.1 zu finden.

Tabelle A1 – Akronyme und Initialwörter

Akronym oder Initialwort	Beschreibung
BIPM	Bureau International des Poids et Mesures Internationales Büro für Maß und Gewicht
GUM	Guide to the expression of uncertainty in measurement Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen
IEC	International Electrotechnical Commission Internationale Elektrotechnische Kommission
IFCC	International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine Internationaler Verband der klinischen Chemie und Laboratoriumsmedizin
ILAC	International Laboratory Accreditation Cooperation Internationale Vereinigung von Akkreditierungsstellen für Laboratorien
ISO	International Organization for Standardization Internationale Organisation für Normung
IUPAC	International Union of Pure and Applied Chemistry Internationale Union für reine und angewandte Chemie
IUPAP	International Union of Pure and Applied Physics Internationale Union für reine und angewandte Physik
JCGM	Joint Committee for Guides in Metrology Gemeinsamer Ausschuss für metrologische Leitfäden
MCM	Monte-Carlo-Methode
OIML	International Organization of Legal Metrology Internationale Organisation für das gesetzliche Messwesen
TAG4	ISO Technical Advisory Group 4 ISO Technische Beratungsgruppe 4
VIM	International Vocabulary of Metrology Internationales Wörterbuch der Metrologie

B Bibliographie

- [1] Bell, S. Measurement Good Practice Guide No. 11. A Beginner's Guide to Uncertainty of Measurement. Tech. rep., National Physical Laboratory, 1999.
- [2] Bernardo, J., and Smith, A. Bayesian Theory. John Wiley & Sons, New York, USA, 2000.
- [3] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. Evaluation of measurement data — Applications of the least-squares method. Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 107, in preparation.
- [4] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. Evaluation of measurement data — Concepts and basic principles. Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 105, in preparation.
- [5] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. Evaluation of measurement data — Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" — Models with any number of output quantities. Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 102, in preparation.
- [6] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. Evaluation of measurement data — Supplement 3 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" — Modelling. Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 103, in preparation.
- [7] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. Evaluation of measurement data — The role of measurement uncertainty in conformity assessment. Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 106, in preparation.
- [8] Casella, G. C., and Berger, R. L. Statistical Inference. Duxbury Press, Pacific Grove, 2001. Second Edition.
- [9] Cox, M. G. The evaluation of key comparison data. *Metrologia* 39 (2002), 589–595.
- [10] Cox, M. G., and Harris, P. M. SSfM Best Practice Guide No. 6, Uncertainty evaluation. Tech. Rep. DEM-ES-011, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2006. 7.3.1, 7.3.2
- [11] Cox, M. G., and Harris, P. M. Software specifications for uncertainty evaluation. Tech. Rep. DEM-ES-010, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2006.
- [12] Dietrich, C. F. Uncertainty, Calibration and Probability. Adam Hilger, Bristol, UK, 1991.
- [13] Elster, C. Calculation of uncertainty in the presence of prior knowledge. *Metrologia* 44 (2007), 111–116.
- [14] EURACHEM/CITAC. Quantifying uncertainty in analytical measurement. Tech. Rep. Guide CG4, EURACHEM/CITEC.[EURACHEM/CITAC Guide], 2000. Second edition.
- [15] Feller, W. An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume I. Wiley, 1968.
- [16] Feller, W. An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume II. Wiley, 1971.
- [17] Hibbert, D. B. Quality Assurance for the Analytical Chemistry Laboratory. Oxford University Press, Oxford, UK, 2007.
- [18] IEC. IEC Guide 115. Application of uncertainty of measurement to conformity assessment activities in the electrotechnical sector. International Electrotechnical Commission, Geneva, Switzerland, 2007.
- [19] ISO. ISO 10576-1. Statistical methods — Guidelines for the evaluation of conformity with specified requirements - Part 1: General principles, 2003. International Standards Organization, Geneva.
- [20] ISO/IEC. ISO/IEC 17025. General requirements for the competence of testing and calibration laboratories, 2005. International Standards Organization, Geneva.
- [21] Korczynski, M. J., Cox, M. G., and Harris, P. M. Convolution and uncertainty evaluation. In *Advanced Mathematical Tools in Metrology VII* (Singapore, 2006), P. Ciarlini, E. Felipe, A. B. Forbes, and F. Pavese, Eds., World Scientific, pp. 188–195.
- [22] Mohr, P. J., and Taylor, B. N. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2002. *Rev. Mod. Phys.* 76 (2004).
- [23] NIST. Uncertainty of measurement results.
- [24] Possolo, A., and Toman, B. Assessment of measurement uncertainty via observation equations. *Metrologia* 44 (2007), 464–475.
- [25] Rice, J. R. *Mathematical Statistics and Data Analysis*, second ed. Duxbury Press, Belmont, Ca., USA, 1995.
- [26] Weise, K., and Wöger, W. A Bayesian theory of measurement uncertainty. *Meas. Sci. Technol.* 3 (1992), 1–11.

C Alphabetischer Index

A

Ablehnung	8.5
analytische Methoden	7.1.1, 7.3
angegebener Bereich	4.8
Anpassungsproblem	9.1, 9.2, 9.4
Anzeigegröße	3.2, 4.7
Anzeigewert	3.2, 6.8, 9.2, 9.3, 9.5, 9.6
kleine Anzahl	4.7
nicht unabhängig ermittelt	4.7
wiederholt	4.6

B

Bias der Messung	3.5
bestimmte Anforderung	8.2
Berechnung ... <i>siehe</i> Schritte der Messunsicherheitsermittlung	

D

Datenermittlung	9.1
-----------------------	-----

E

Empfindlichkeitskoeffizient	4.14, 7.2.1
Ermittlung der Messunsicherheit	
Methode A	4.6, 4.7
Methode B	4.6, 4.8
Erwartungswert	3.18, 4.9

F

falsche Entscheidung	8.4, 8.5
Faltungsproblem	9.4
Fertigungsspezifikation	8.1
festgelegte Grenzen	8.1
Formulierung ... <i>siehe</i> Schritte der Messunsicherheitsermittlung	
Fortpflanzung	5.1
von Verteilungen	3.19, 7.1.1, 7.2.5, 7.4.1
Freiheitsgrad	7.2.2
effektiver	5.2, 6

G

Gesundheit und Sicherheit	8.1
gesetzliches Messwesen	8.1
Grad des Vertrauens	3.8
Größe	8.2, 8.4
abhängig	4.4, 4.16, 7.2.2
Ausgangsgröße	3.14, 3.15, 5.2, 6.6, 6.8, 7.2.1, 7.2.4, 7.3, 7.5.1, 7.5.2, 7.5.4, 7.5.5, 8.2, 9.1, 9.7
Eingangsgröße	3.14, 3.15, 5.2, 6.6, 6.8, 7.1.1, 7.2.3, 7.3, 9.1
mögliche Werte	8.3
unabhängig	4.14
zeitabhängig	3.12

Größenwert	6.8
Intervall von zulässigen Größenwerten	8.2
gemessener	3.2, 6.8, 8.2, 8.5, 9.2, 9.3, 9.6
konform	8.2
nicht-konform	8.2
wahrer Wert	3.3, 8.1

H

Hyperellipsoid	7.5.6
----------------------	-------

I

industrielle Kontrolle	8.1
------------------------------	-----

K

Kalibrierfunktion	6.5, 6.8
Parameter	6.8, 9.7
Umkehrung	6.8
Kalibrierung	3.9, 9.2
kleinste Fehlerquadrate	9, 9.5, 9.6
Anpassung	9.1, 9.2
Konformität	
Konformitätsbewertung	8, 8.1, 8.2
Spezifikation	8.3, 8.4
Korrektion	
beigeordnete Unsicherheit	3.11
Korrelation	4.4
Kovarianz	4.4, 4.16, 6.6, 6.8, 7.5.1, 7.5.4, 7.5.5, 9.3, 9.5, 9.6

M

Maßeinheiten, Umwandlung von	7.3.2
Matrizenform	7.5.2, 9.7
linear	4.14, 7.2.3, 7.3.1
Messabweichung	
systematische	3.4, 3.5, 3.6, 3.11
zufällige	3.5, 3.6
Messfunktion	3.15, 4.14
additiv	4.10
nicht linear	7.2.4
Messgröße	3.1, 3.6, 5.2, 8.2
Messnormal	6.8, 9.2
Messsystem	3.2, 3.4, 9.2, 9.5
Messunsicherheit	3.6, 3.8, 4.2, 8.2, 9.6
Messunsicherheitsermittlung	6.6
Problem der Unsicherheitsermittlung	7.1.2
Schritte	5
Methode des GUM	7.1.1, 7.2, 7.2.3 – 7.2.5, 7.4.1, 7.5.1, 7.5.2
Bedingungen für die Anwendung ...	7.2.3, 7.2.4
im Vergleich zur Monte-Carlo-Methode ...	7.4.1
Gültigkeitsprüfung mittels Monte-Carlo-Methode	7.4.3
Mittelwert	3.3, 3.4
Model der Messung	3.10, 3.14, 3.15, 4.14, 5.2, 6.6, 7.5.1, 7.5.2
allgemeine Form	3.16, 7.1.3
beliebige Anzahl von Ausgangsgrößen	6.6, 7.5, 7.5.3, 7.5.4

Berechnung	7.1.1
kompliziertes Modell	7.2.5
mehrstufig	6.8
Parameteranpassung	9.1, 9.3
Monte-Carlo-Methode 7.1.1, 7.2.5, 7.4, 7.5.1, 7.5.4	
adaptiv	7.4.2
Anzahl der Ziehungen	7.4.2
Bedingungen für die Anwendung	7.4.1
Beispiele	7.4.1
Vergleich mit den Methode des GUM	7.4.1

P

Parameter	
Kalibrierfunktion	9.5
Schätzung	9.4
partielle Ableitung	4.14, 7.2.5
physikalische Konstante	3.13

Q

quadratisch kombinierte Terme	4.15
Qualitätskontrolle	8.1

R

Regulierung	8.1
Ringvergleich	9.4
Risiko	8.4
Herstellerrisiko	8.4
Verbraucherrisiko	8.4
Verteilen von Risiken	8.2

S

Schätzwert	3.3, 4.9, 6.6, 6.8, 7.2.1, 7.5.1, 7.5.4, 7.5.5
bester	3.18, 4.4, 7.2.1
Schritte der Messunsicherheitsermittlung	
Berechnung	5.3, 7
Formulierung	5.2, 6
Software- Anwendung	7.5.2
Spezifikationsgrenzen	8.2, 8.3, 8.5
Standardmessunsicherheit	3.18, 4.4, 4.9, 4.14, 6.6, 6.8, 7.2.1, 7.5.4, 7.5.5, 9.3, 9.5, 9.6
Standardabweichung	3.18, 4.7, 4.9
Streuung	3.3
Schritte der Messunsicherheitsermittlung	
Berechnung	5.3, 7
Formulierung	5.2, 6
Software- Anwendung	7.5.2
Spezifikationsgrenzen	8.2, 8.3, 8.5
Standardmessunsicherheit	3.18, 4.4, 4.9, 4.14, 6.6, 6.8, 7.2.1, 7.5.4, 7.5.5, 9.3, 9.5, 9.6
Standardabweichung	3.18, 4.7, 4.9
Streuung	3.3

T

theoretischer Zusammenhang	9.1
----------------------------------	-----

U

Überdeckungsintervall	4.11, 7.2.2
kürzestes	4.12, 7.5.5
symmetrisches	4.12, 7.5.5
Überdeckungsregion	7.5.5
approximativ	7.5.6
hyperrechteckig	7.5.6
kleinste	7.5.5, 7.5.6
Überdeckungswahrscheinlichkeit	4.11, 4.12, 7.2.5, 7.5.5
Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz	7.1.1, 7.5.2
Terme höherer Ordnung	7.2.5
unvollständiges Wissen	8.4

V

Variable	
abhängige	9.1
gemessene Werte	9.1
unabhängige	9.1, 9.2, 9.4
gemessene Werte	9.1
vorhandene Kenntnisse	3.19, 5.2, 6.6
Vorkenntnisse	3.20

W

wahrer Wert	3.17
Wahrscheinlichkeit	3.8, 8.3
Konformitätswahrscheinlichkeit	8.5
Wahrscheinlichkeitsverteilung	3.17, 3.18, 4.3, 5.2, 6.6, 7.1.1, 7.2.2 – 7.2.4, 7.3, 8.3 – 9.6
asymmetrisch	4.13, 7.2.4
den Eingangsgrößen zugeordnet	6.1
diskrete Darstellung	7.5.4
Gaußsche Normalverteilung	4.7, 5.2, 7.1.1, 7.2.2, 7.3.1, 8.6
gemeinsame	3.17
gemeinsame Gaußsche Normalverteilung	7.5.6
rechteckig	4.8, 4.10, 7.3.1
t-Verteilung	4.7, 7.1.1, 7.2.2
trapezförmig	4.10, 7.3.1
Verteilungsfunktion	4.3, 7.1.1
Wahrscheinlichkeitsdichte	4.3
wissenschaftliches Urteilsvermögen	4.6

Z

zentraler Grenzwertsatz	7.5.6
Zufallsgröße	3.17
Zusammenfassung	5.1