308. PTB-Seminar

Berechnung der Messunsicherheit – Empfehlungen für die Praxis

15. und 16. März 2018 in der PTB Berlin

Dr.-Ing. Michael Hernla

Erweiterte Messunsicherheit bei nicht korrigierten systematischen Abweichungen

Ermittlung der Messunsicherheit nach GUM

Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen [1]

1. Messgröße Y
2. Eingangsgrößen X_i
3. Mathematisches Modell $Y = f(X_i)$
4. Methode A oder B
5. Standardunsicherheiten $u(x_i)$
6. Sensitivitätskoeffizienten $c_i = \delta f_i / \delta x_i$
7. Unsicherheitsbeiträge $u_i(y) = c_i * u(x_i)$
8. Standardunsicherheit der Messgröße $u(y)$
9. Erweiterte Messunsicherheit $U = k * u(y)$

Systematische Abweichungen

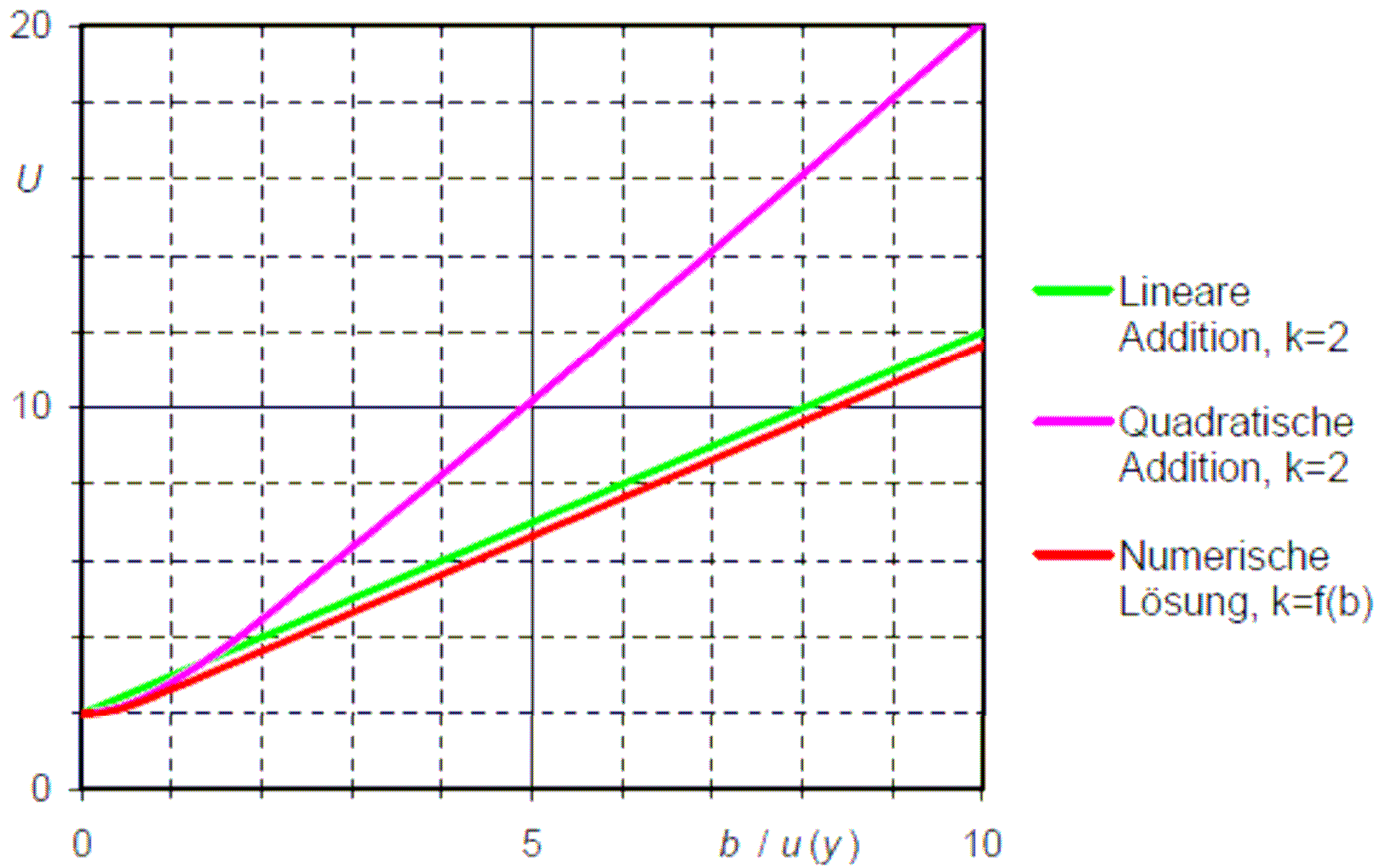
- GUM: Systematische Abweichungen immer korrigieren
- ... oder Angabe beim Schätzwert: $y' = y + b$
- Praxis: Systematische Abweichung oft nicht korrigiert, sondern Bestandteil der Messunsicherheit
- Z.B. VDA Band 5 [2]: Lineare Addition zur erweiterten Messunsicherheit: $U_L = k * u(y) + |b|$
- Keine Rückrechnung auf die Standardunsicherheit $u(y)$ möglich – nicht konsistent und nicht übertragbar

Erklärung der PTB

Erklärung der PTB zur Behandlung systematischer Abweichungen [3]:

- Systematische Abweichung b als zusätzlicher Unsicherheitsbeitrag $u_{n+1}(y) = |b|$
- Quadratische Addition zur Standardunsicherheit:
  $U_Q = k \cdot \sqrt{u^2(y) + b^2}$
- Bei großen systematischen Abweichungen zu große erweiterte Messunsicherheiten, da *b* verdoppelt

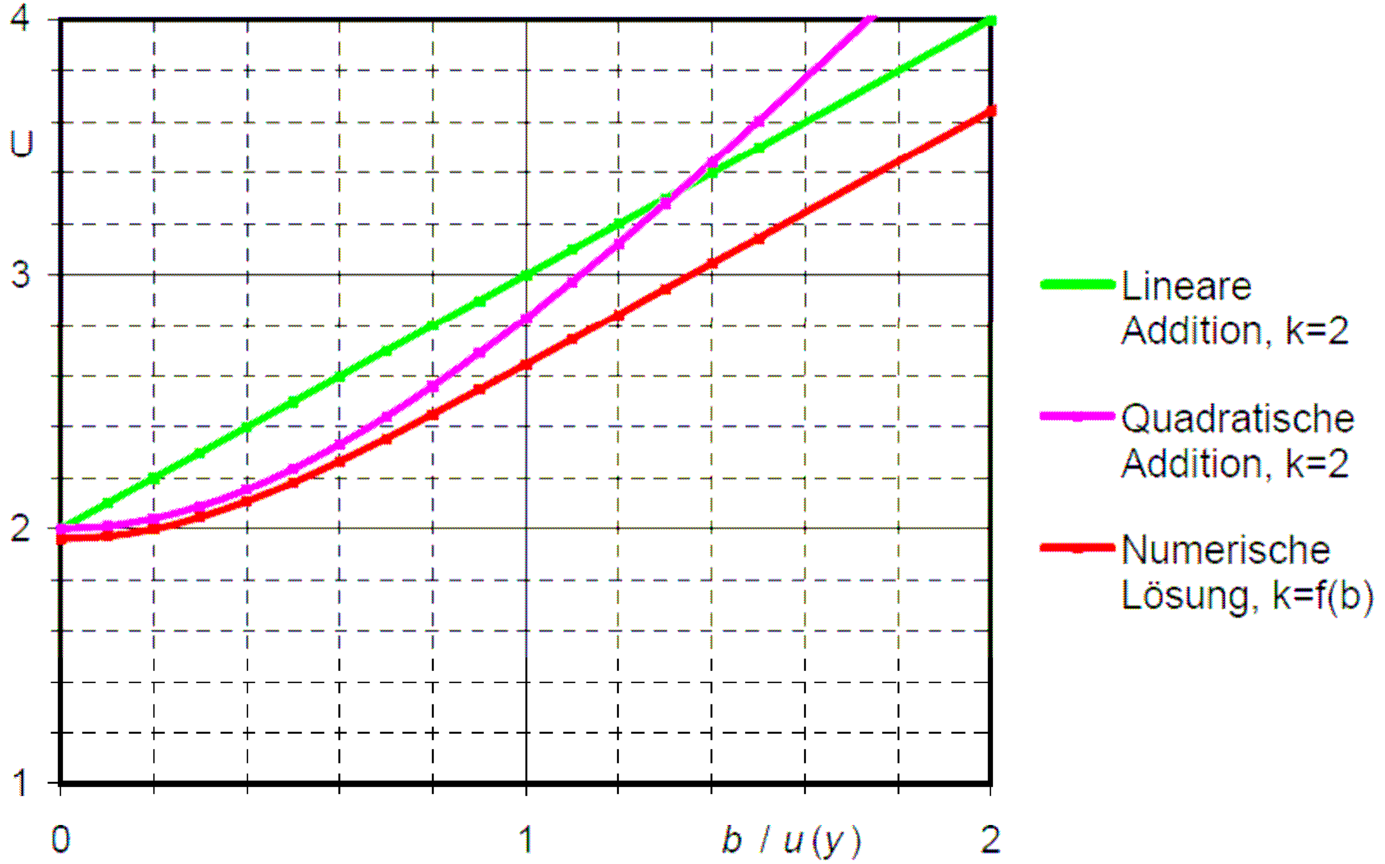
Erweiterte Messunsicherheiten



Diskussion der Abweichungen

- Vergleich mit numerischer Lösung aus Simulation
- „Kleine“ systematische Abweichungen $b \leq u(y)$:
  Quadratische Addition mit U_{Q} näher an U
- „Große“ systematische Abweichungen $b > u(y)$:
  Lineare Addition mit U_{L} näher an U
- Quadratische Addition mit Erweiterungsfaktor $k = 2$?

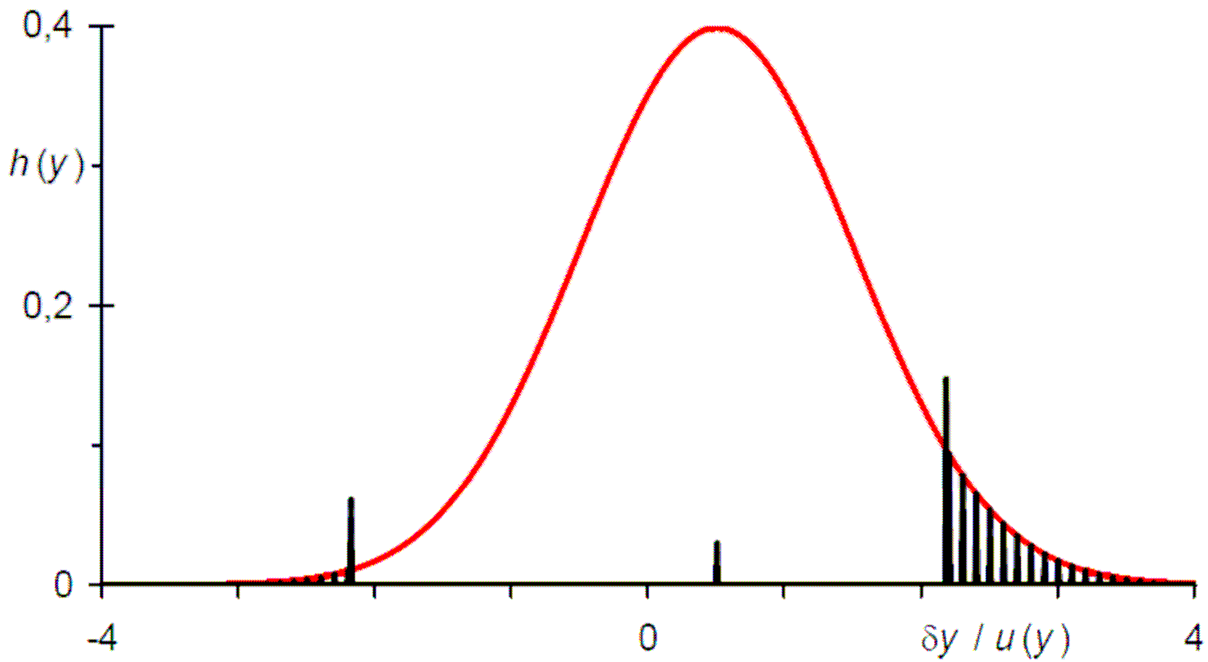
Erweiterte Messunsicherheiten – Ausschnitt



Numerische Lösung durch Simulation

Beispiel

Normalverteilung mit systematischer Abweichung $b = 0{,}5 \cdot u(y)$, Standard-unsicherheit $u(y) = 1$ und Vertrauensgrenzen symmetrisch zum Messwert (0)



Große systematische Abweichungen

- Bei systematischen Abweichungen $b > u(y)$ praktisch alle Überschreitungen auf einer Seite
- Statt zweiseitiger 95%-Vertrauensgrenze richtig einseitige 95%-Vertrauensgrenze
- Normalverteilung mit $k_L = 1{,}645 + |b| / u(y)$ für die Abweichungen vom unkorrigierten Messwert (0)
- Berechnung des Erweiterungsfaktors k_Q für die quadratische Addition in Abhängigkeit von b

Erweiterungsfaktor *k* bei Normalverteilung

- Lineare Addition: $U_L = k_L \cdot u(y) + |b|$

  mit k_L für P=95% (einseitig) bzw. P=90% (zweiseitig)

- Quadratische Addition: $U_Q = k_Q \cdot \sqrt{u^2(y) + b^2}$

- Ansatz $U_L = U_Q$

- Erweiterungsfaktor: $k_Q = \dfrac{k_L \cdot u(y) + |b|}{\sqrt{u^2(y) + b^2}}$

Beispiel

- Lineare Addition: $U_L = k_L \cdot u(y) + |b|$

  für b = 1,3 $u(y)$ ist $k_L = 1{,}645$ und $U_L = 2{,}945 \cdot u(y)$

- Quadratische Addition: $U_Q = k_Q \cdot \sqrt{u^2(y) + b^2}$

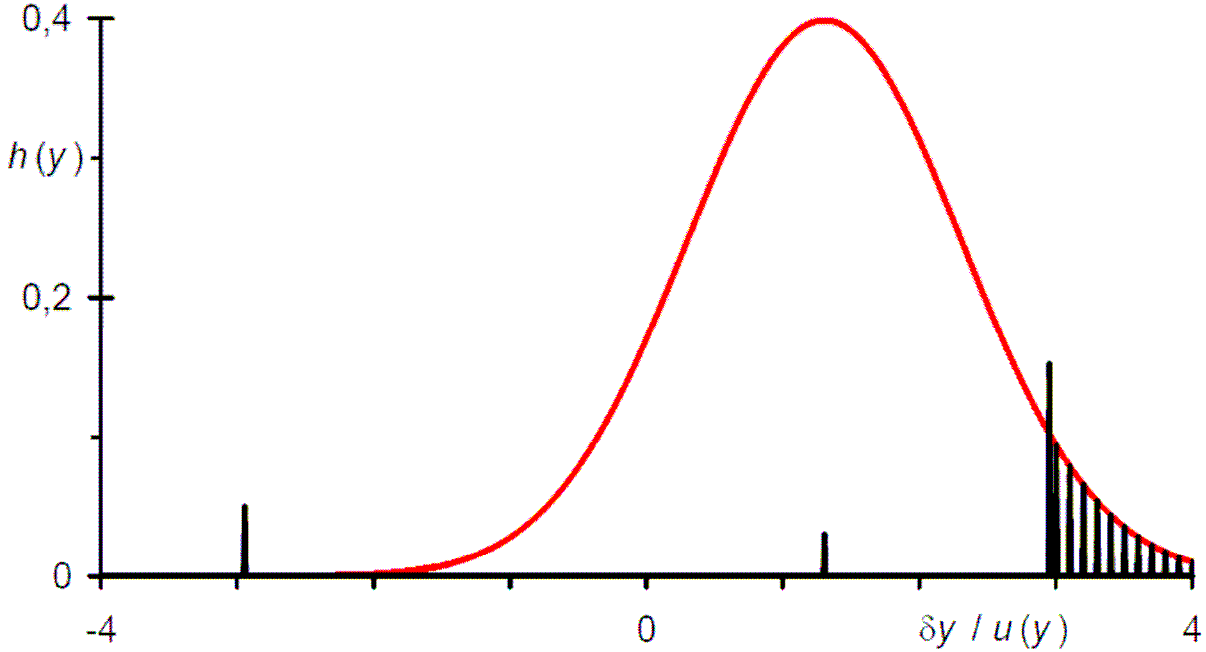
  für b = 1,3 $u(y)$ ist $k_Q = 1{,}796$ und $U_Q = 2{,}945 \cdot u(y)$

- Bei großen b wird k_Q kleiner und nähert sich an 1 an:

  für $b = 10 \cdot u(y)$ ist $k_Q = 1{,}159$ und $U_Q = 11{,}645 \cdot u(y)$

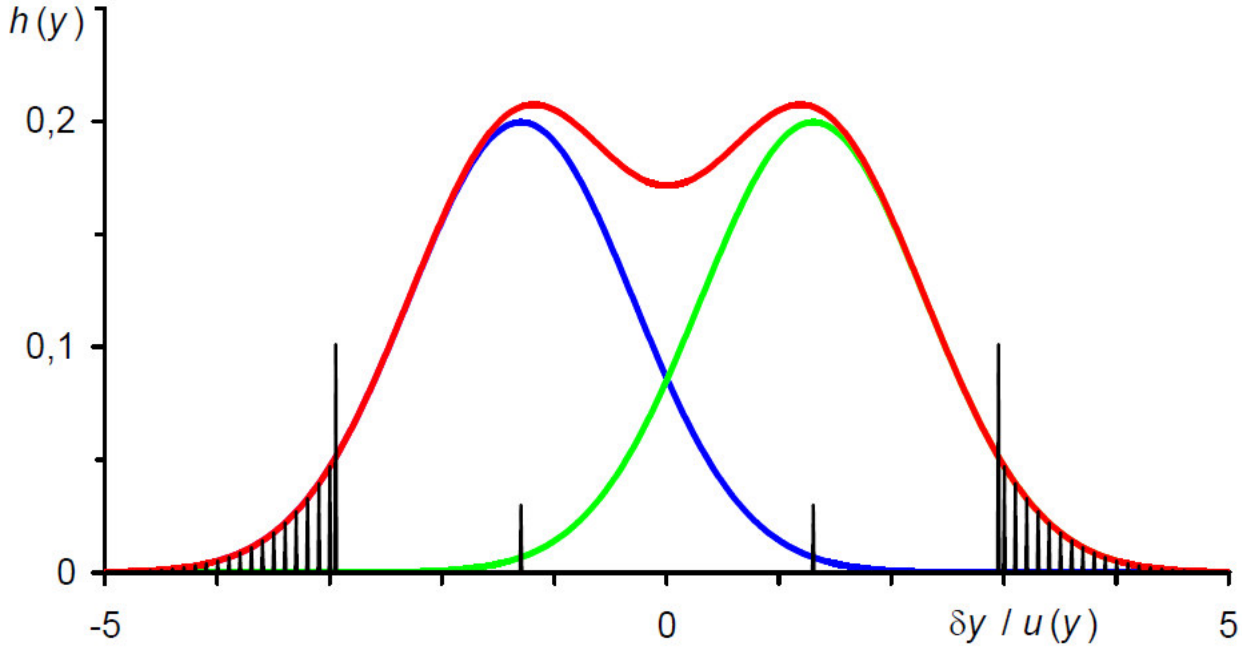
Systematische Abweichung vom korrigierten Messwert (0)

$b = 1{,}3\ u(y)$ und $U = 2{,}945$

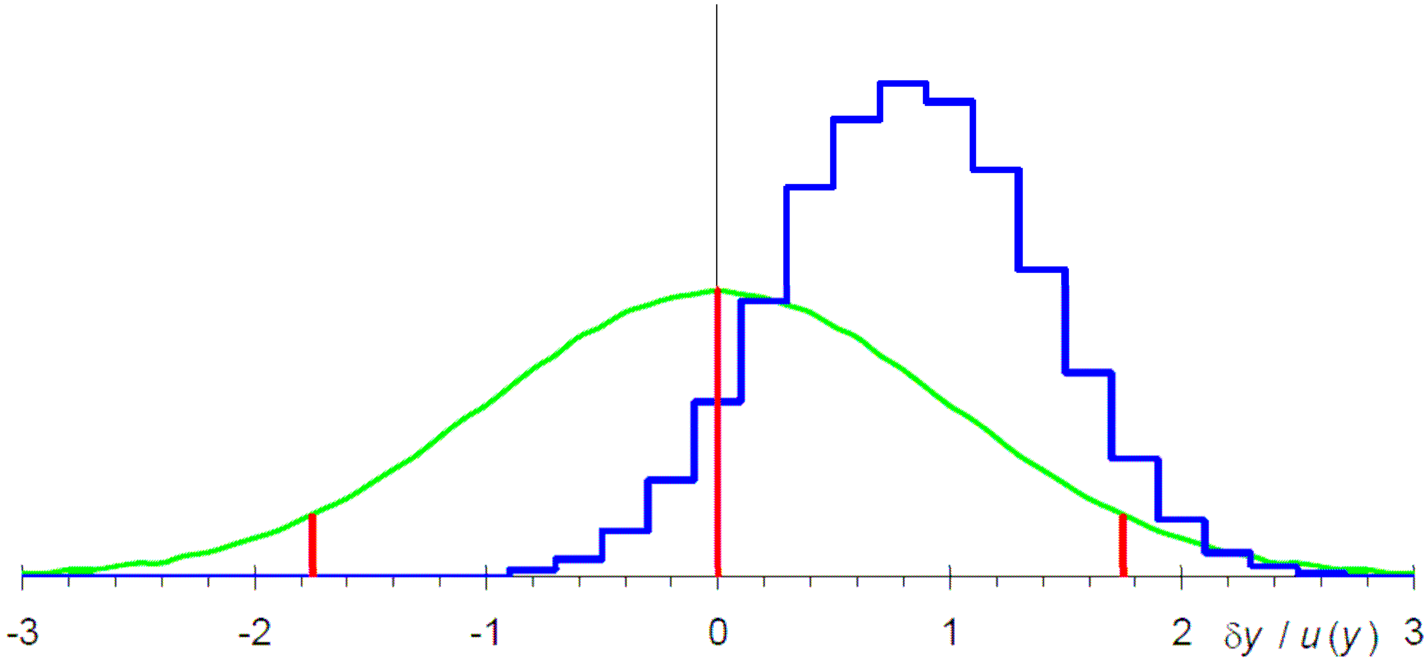


Bimodalverteilung

$b = 1{,}3\ u(y)$ und $U = 2{,}945$

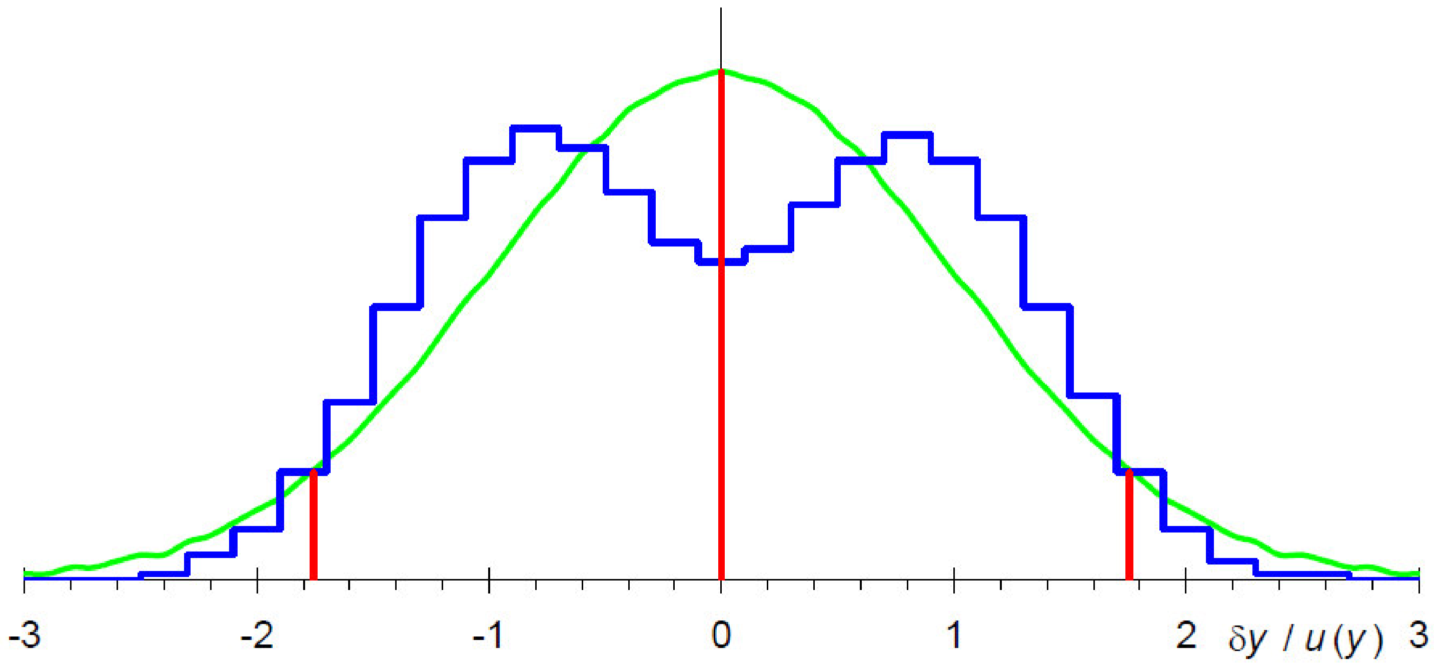


Numerische Simulation mit unkorrigiertem Messwert (0)



Mit jeder Software möglich?

Numerische Simulation mit Bimodalverteilung



Mit jeder Software möglich?

Analytische Lösung für Normalverteilung

	Standard-Schema	Systematische Abweichung $b > u(y)$
Standardunsicherheit:	$u'(y) = \sqrt{u^2(y) + b^2}$	
Erweiterungsfaktor:	$k = 2$	$k = \dfrac{1{,}645 \cdot u(y) + \lvert b \rvert}{u'(y)}$
Erweiterte Messunsicherheit:	$U = k\, u'(y)$	

Beispiel 1: Endmaßkombination

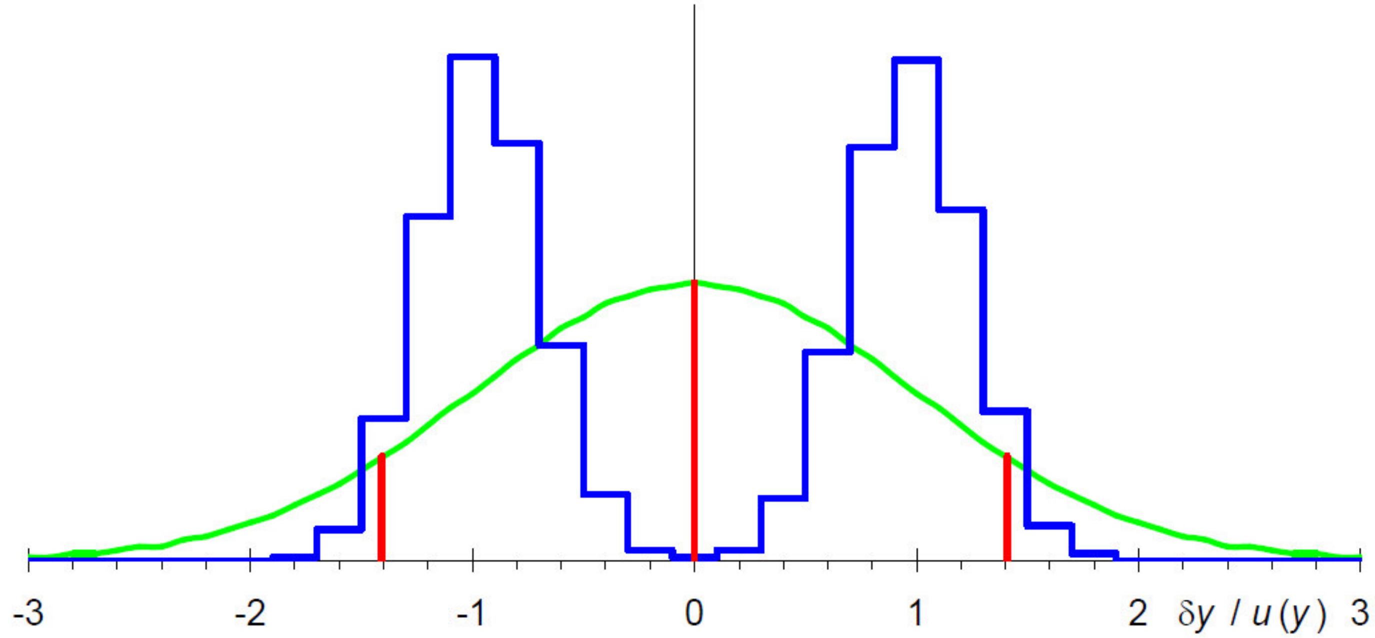
DIN EN ISO 3650 – Toleranzklasse 1 (Werte in µm)

		Fehler-grenzen	Mittenabw. korrigiert	M. nicht korrigiert	Analytisch $k = f(b)$
Messwert (mm)	y =	29,29300	29,29342	29,29300	29,29300
Systematische Abweichung	b =	---	---	0,42	0,42
Standard-unsicherheit	$u(y)$ =	0,26	0,12 [1)]	0,44	0,44
Erweite-rungsfaktor	k =	2,00	2,00	2,00	1,407
Erweiterte Messunsich.	U =	0,52	0,24	**0,87**	**0,61**

[1)] Aus den Kalibrierunsicherheiten der Mittenmaßabweichungen

Beispiel 1: Endmaßkombination

100.000 Simulationen mit Bimodalverteilung
k = 1,408, U = 0,62 µm



Übertragung

- Verwendung der Messgröße als Eingangsgröße in einer neuen Unsicherheitsermittlung
- Eingabe der erweiterten Messunsicherheit U mit Erweiterungsfaktor $1 \leq k \leq 2$?
- Direkt mit Standardunsicherheit $u'(y)$ rechnen?
- Aber wie Verteilungsform berücksichtigen?

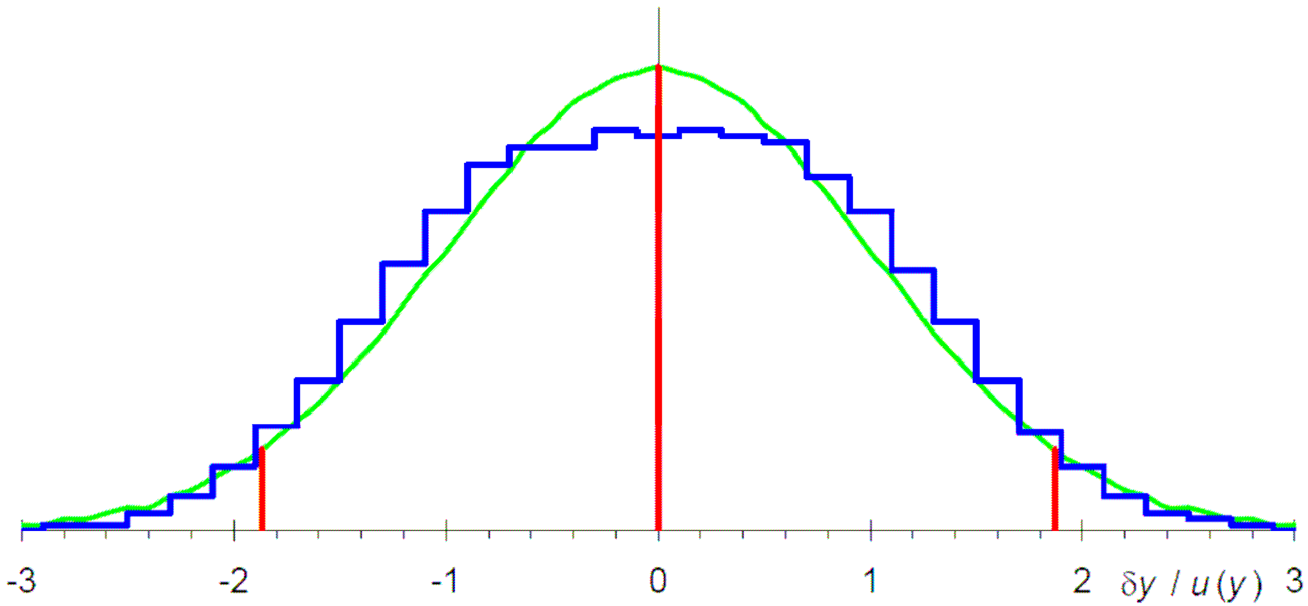
Beispiel 2: Vergleichsmessung mit Endmaßkombination (1)

Systematische Abweichung im Modell berücksichtigt
mit <u>großer</u> Standardunsicherheit $u(y) \approx b$

		Syst. Abw.		Bimodal	
		Analytisch	Simulation	Analytisch	Simulation
Systematische Abweichung	$b =$	0,42	---	0,42	---
Standard-unsicherheit	$u(y) =$	0,59	0,59	0,59	0,59
Erweite-rungsfaktor	$k =$	1,869	1,866	1,869	1,869
Erweiterte Messunsich.	$U =$	**1,11**	**1,10**	**1,11**	**1,10**

Beispiel 2: Vergleichsmessung mit Endmaßkombination (2)

100.000 Simulationen mit Bimodalverteilung



Beispiel 2: Vergleichsmessung mit Endmaßkombination (2)

Systematische Abweichung in der neuen Standardunsicherheit $u'(y)$
mit Normalverteilung (100.000 Simulationen)

		Schema	Simulation
Systematische Abweichung	b =	---	---
Standard-unsicherheit	$u(y)$ =	0,59	0,60
Erweite-rungsfaktor	k =	2	1,961
Erweiterte Messunsich.	U =	**1,19**	**1,18**

Übertragung – Zusammenfassung

- Ohne Berücksichtigung der Verteilungsform (etwas) größere Unsicherheit
- Mit systematischer Abweichung im Gesamtmodell durchgängige analytische Lösung – aber nur bei Normalverteilung
- Andere Verteilungen mit numerischer Simulation der Abweichungen vom Messwert

Beispiel 3: Temperatur (1)

- Nicht korrigierte Temperaturabweichung von 20 °C
- Zweite systematische Abweichung überlagert
- Vorzeichenrichtige Addition der systematischen Abweichungen

Beispiel 3: Temperatur (2)

Beträge der systematischen Abweichungen addieren sich

		Analytisch	Simulation	Schema
Systematische Abweichung	b =	0,72	---	---
Standard-unsicherheit	$u(y)$ =	0,73	0,73	0,73
Erweite-rungsfaktor	k =	1,263	1,262	2
Erweiterte Messunsich.	U =	**0,93**	**0,92**	1,47

Beispiel 3: Temperatur (3)

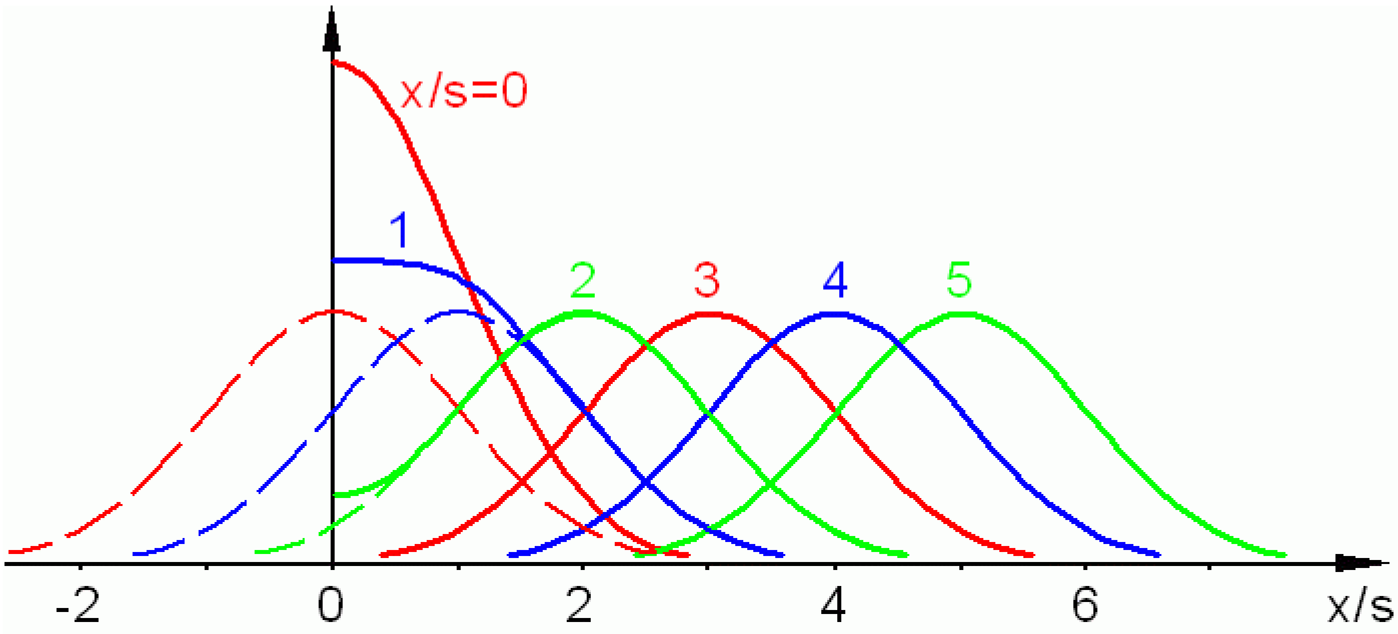
Beträge der systematischen Abweichungen heben sich auf

		Analytisch	Simulation	Schema
Systematische Abweichung	b =	0,12	---	---
Standard-unsicherheit	$u(y)$ =	0,17	0,17	0,17
Erweite-rungsfaktor	k =	1,885	1,888	2
Erweiterte Messunsich.	U =	**0,32**	**0,32**	0,34

Beispiel 4: Betragsverteilungen (1)

Betragsverteilung 1. Art: $Y = | X |$

Beispiele: Symmetrie, Position in einer Richtung



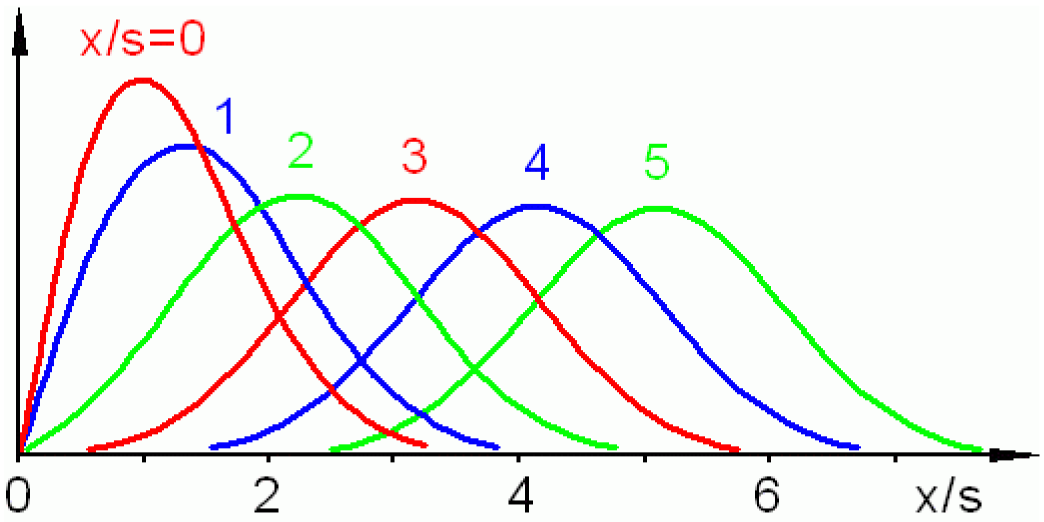
Beispiel 4: Betragsverteilungen (2)

- Durch Betragsbildung einseitig positive Abweichungen
- Wirkt wie systematische Abweichung – aber abhängig vom Erwartungswert bzw. Messwert
- Bei großen Abweichungen $x \geq 2 \cdot s = U$ Übergang zur Normalverteilung
- Bei Beachtung der Goldenenen Regel $U \leq T / 5$ Abweichungen an den Toleranzgrenzen normalverteilt
- Andere Verteilung in der Toleranzmitte hat keine Folgen
- Problem durch vorzeichenrichtige Abweichungen vermieden

Beispiel 4: Betragsverteilungen (3)

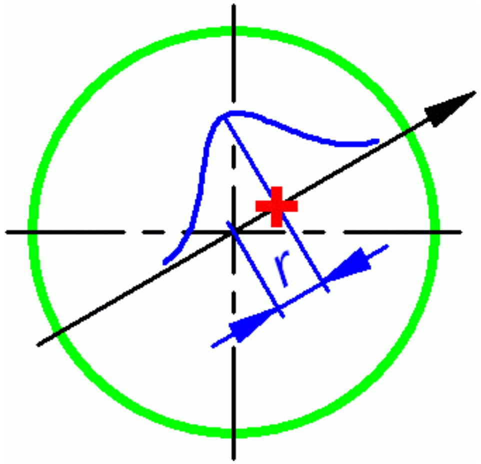
Betragsverteilung 2. Art: $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$

Beispiele: Koaxialität, Position in der Ebene



Beispiel 4: Betragsverteilungen (4)

- Durch Wurzel einseitig positive Abweichungen
- Folgen wie bei Betragsverteilung 1. Art
- Problem vermeiden durch vorzeichenrichtige radiale Abweichungen



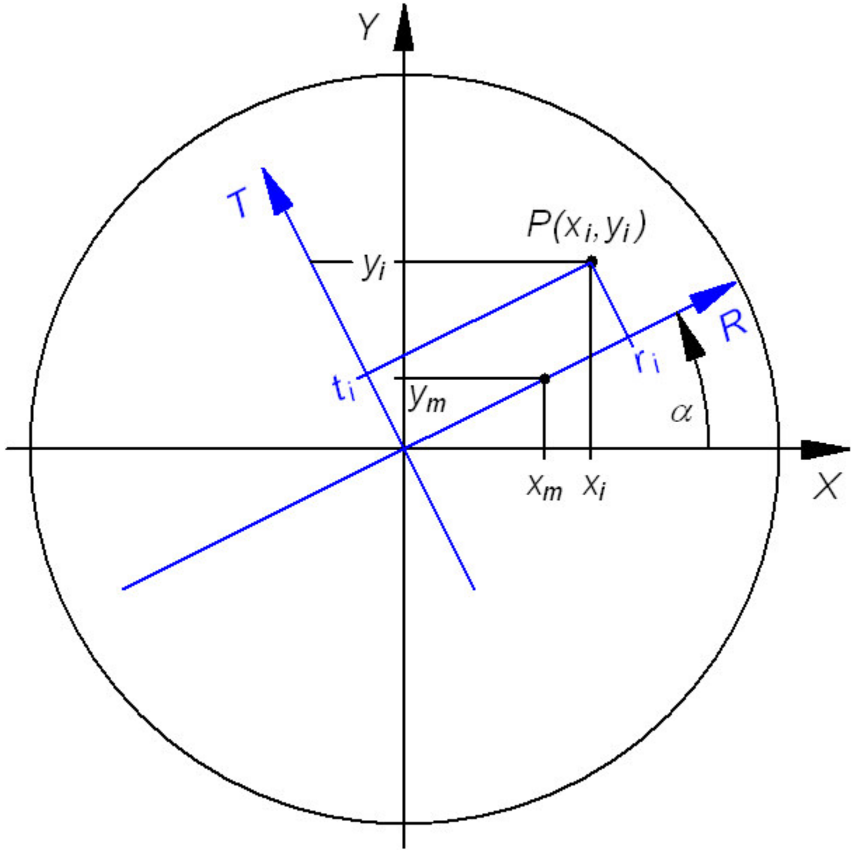
Vorzeichenrichtige radiale Abweichungen

Polarwinkel α der Abweichung (x_m,y_m):

$$\alpha = \arctan \frac{y_m - y_0}{x_m - x_0}$$

Radiale Abweichungen r_i:

$$r_i = \frac{x_i}{\cos\alpha} + (y_i - x_i \cdot \tan\alpha) \cdot \sin\alpha$$



Zusammenfassung

- Nicht korrigierte systematische Abweichungen quadratisch zur Standardunsicherheit der Messgröße addiert
- Erweiterungsfaktor hängt vom Betrag der systematischen Abweichungen ab und wird kleiner als $k = 2$
- Übertragung mit Standardunsicherheit der Messgröße – Messunsicherheit leicht überschätzt
- Mehrere systematische Abweichungen vorzeichenrichtig addieren
- Betragsverteilungen 1. und 2. Art nur in Toleranzmitte, an den Toleranzgrenzen normalverteilt (Goldene Regel)
- Durch vorzeichenrichtige Abweichungen ganz vermeiden

Literatur

[1] JCGM 100:2008-09: Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM). Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres (www.bipm.org/en/publications/guides)

[2] VDA Band 5 Prüfprozesseignung. VDA Verband der Automobilindustrie, Berlin 2011

[3] Erklärung der PTB zur Behandlung systematischer Abweichungen bei der Berechnung der Messunsicherheit. Braunschweig 2010 https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_8/8.4_mathematische_modellierung/8.40/GUM_-_systematische_Abweichungen.pdf

[4] Hernla, M.: Messunsicherheit bei nicht korrigierten systematischen Messabweichungen. Technisches Messen, München, 75 (2008) 11, S. 609-615

Weitere Informationen: www.dr-hernla.de