

Darstellung von Korrekturen und Unsicherheiten für einen Messbereich auf der Basis von wenigen Kalibrierpunkten bei einem Widerstandsthermometer

(Anwendung der Matrizenrechnung zur Lösung
der Regression)

Dr. R. Frieling
rfrieling@gmx.de

DTI 1000



Callendar-Gleichung

$$R = f(T) = R_0(1 + A \cdot T + B \cdot T^2) \quad \text{mit:}$$

- T Temperatur, der der PRT Fühler ausgesetzt ist
 R Widerstand des PRT Fühlerelements bei der Temperatur T
 R_0 Widerstand des PRT Fühlerelements bei 0 °C
 A Koeffizient des linearen Terms
 B Koeffizient des quadratischen Terms

$R_{0\text{Norm}}$	A_{Norm}	B_{Norm}
100,0000 Ω	3,90830E-03 1 / °C	-5,77500E-07 1 / °C ²

Normkoeffizienten
(IEC 751)

$$T = f^{-1}(R) = -\frac{A}{2 \cdot B} - \sqrt{\frac{\frac{R}{R_0} - 1}{B} + \left(\frac{A}{2 \cdot B}\right)^2}$$

(Kehrfunktion)

Kalibrierung des Normalthermometers

"alte" Koeffizienten
(während der Kalibrierung)

R_{0K}	A_K	B_K
100,0512 Ω	3,90582E-03 1 / $^{\circ}\text{C}$	-5,72788E-07 1 / $^{\circ}\text{C}^2$

Messergebnisse aus dem Kalibrierschein

Laufende Nummer	Temperaturvorgabewerte	Temperaturanzeige Kal.Gegenstand	Widerstandsanzeige Kal.Gegenstand	erweiterte Messunsicherheit	Temperaturabweichung Kal.Gegenstand
i	T_N	T_M	R_{MKal}	U_M	ΔT_M
1	-30,000 $^{\circ}\text{C}$	-30,016 $^{\circ}\text{C}$	88,2698 Ω	0,020 K	-0,016 K
2	0,000 $^{\circ}\text{C}$	0,002 $^{\circ}\text{C}$	100,0519 Ω	0,020 K	0,002 K
3	100,000 $^{\circ}\text{C}$	100,029 $^{\circ}\text{C}$	138,5681 Ω	0,020 K	0,029 K
4	200,000 $^{\circ}\text{C}$	199,996 $^{\circ}\text{C}$	175,9107 Ω	0,020 K	-0,004 K
5	300,000 $^{\circ}\text{C}$	299,953 $^{\circ}\text{C}$	212,1335 Ω	0,030 K	-0,047 K
6	400,000 $^{\circ}\text{C}$	400,036 $^{\circ}\text{C}$	247,2137 Ω	0,040 K	0,036 K
7	500,000 $^{\circ}\text{C}$	500,204 $^{\circ}\text{C}$	281,1891 Ω	0,050 K	0,204 K

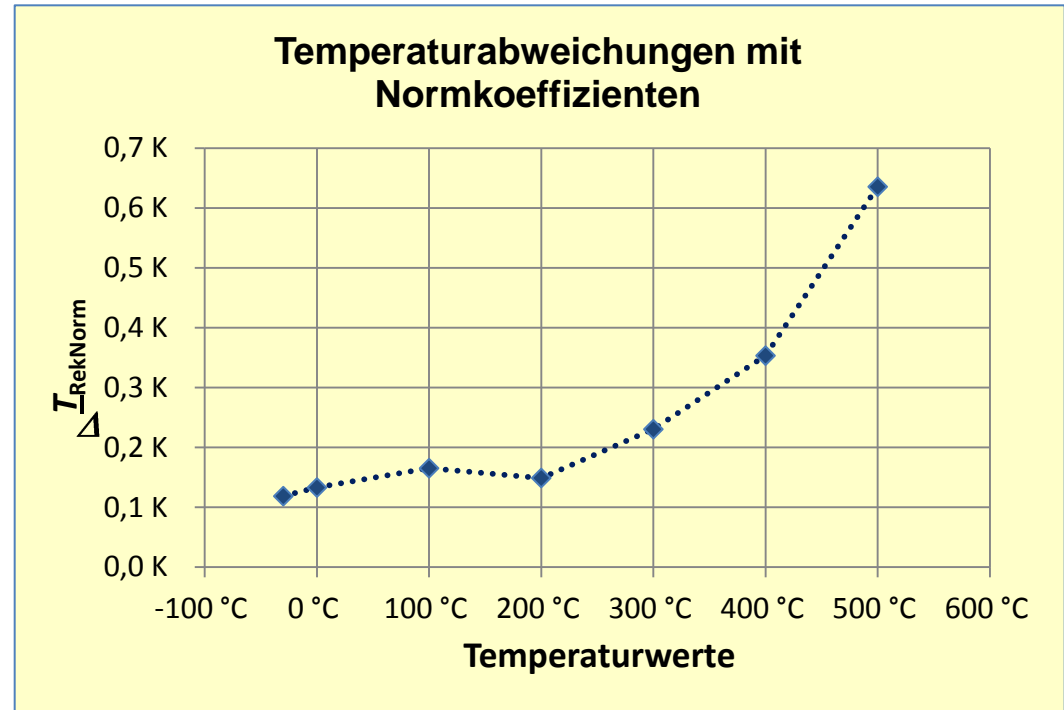
Simulation der Anzeigeeinheit mit Normkoeffizienten

$R_{0\text{Norm}}$	A_{Norm}	B_{Norm}
100,0000 Ω	3,90830E-03 1 / $^{\circ}\text{C}$	-5,77500E-07 1 / $^{\circ}\text{C}^2$

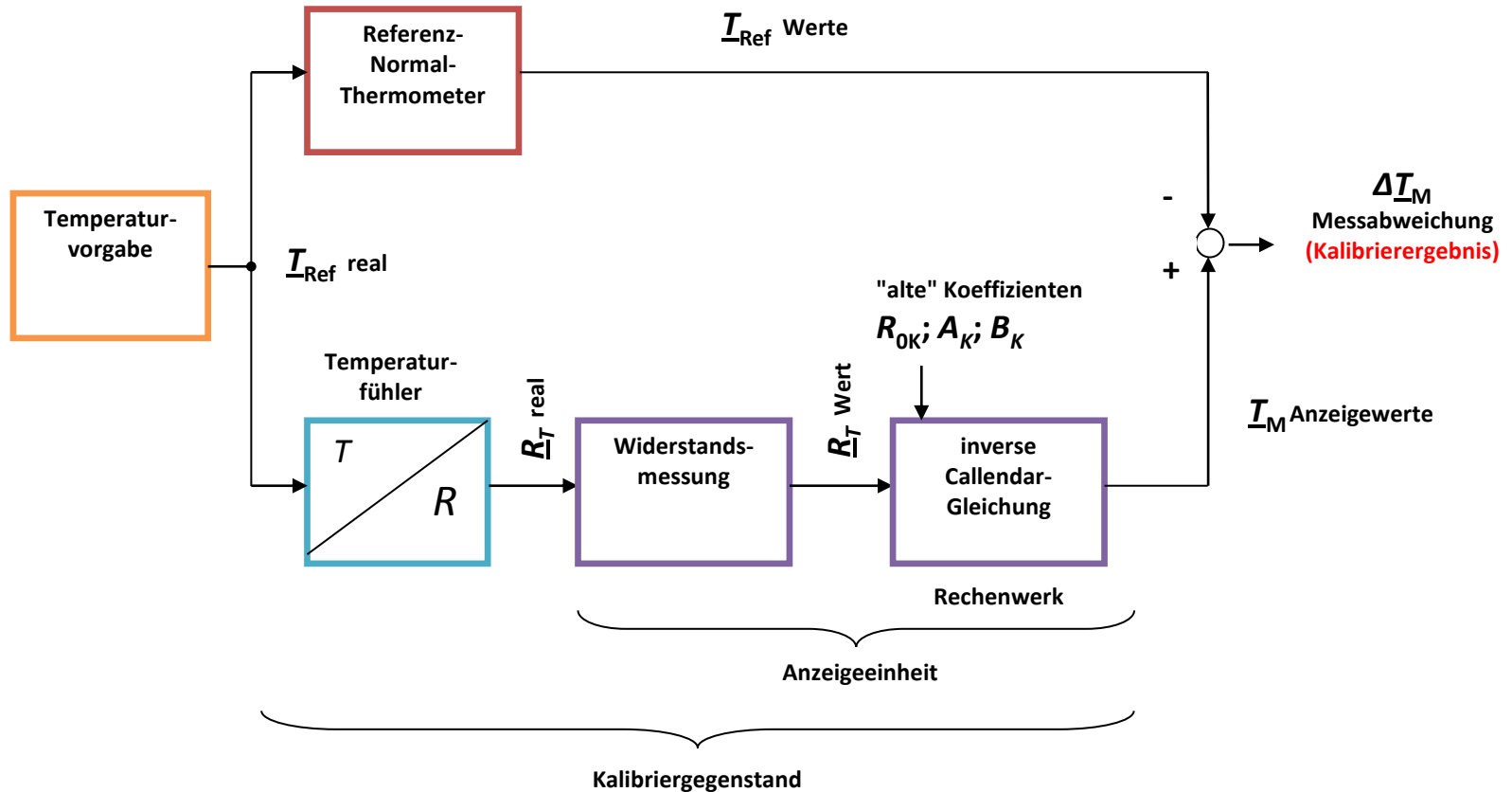
Normkoeffizienten
(IEC 751)

Temperatur- vorgabewerte	Widerstands- anzeige Kal.Gegenstand	Abweichung Widerstandswerte
\underline{T}_N	\underline{R}_{MKal}	$\Delta \underline{T}_{\text{RekNorm}}$
-30,000 $^{\circ}\text{C}$	88,2698 Ω	0,118 K
0,000 $^{\circ}\text{C}$	100,0519 Ω	0,133 K
100,000 $^{\circ}\text{C}$	138,5681 Ω	0,165 K
200,000 $^{\circ}\text{C}$	175,9107 Ω	0,149 K
300,000 $^{\circ}\text{C}$	212,1335 Ω	0,230 K
400,000 $^{\circ}\text{C}$	247,2137 Ω	0,353 K
500,000 $^{\circ}\text{C}$	281,1891 Ω	0,635 K

wurde auch
mit kalibriert

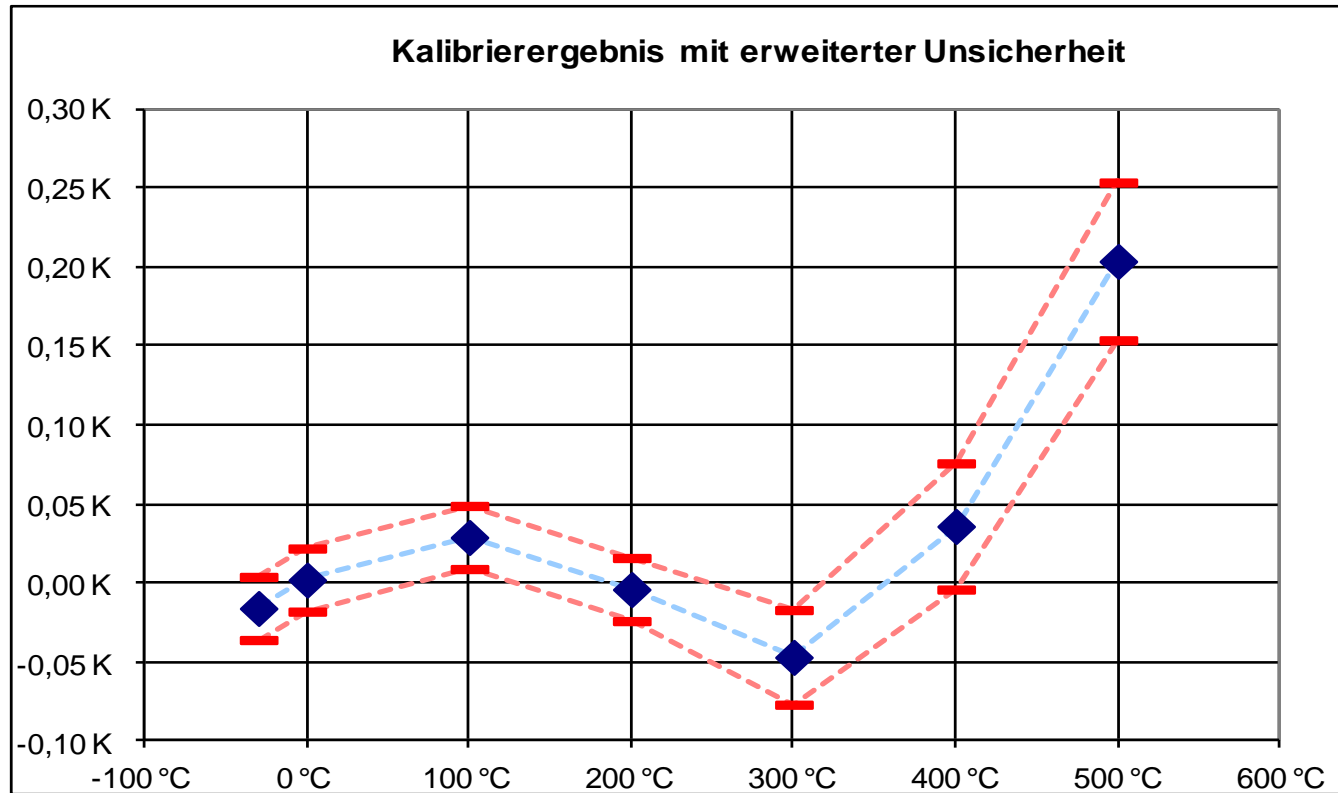


Kalibrierung des Normalthermometers



Blockdiagramm: Kalibrierung des Normalthermometers

Kalibrierergebnis Diagramm



Zusatzinformation zum Kalibrierungsvorgang des Normalthermometer

Laufende Nummer	Temperaturwerte Vorgaben	Bemerkungen
i	T_N	
1	- 30,000 °C	Kalibriert mit Normalthermometer 1
2	0,000 °C	Kalibriert am Eispunkt
3	100,000 °C	Kalibriert mit Normalthermometer 2
4	200,000 °C	Kalibriert mit Normalthermometer 2
5	300,000 °C	Kalibriert mit Normalthermometer 2
6	400,000 °C	Kalibriert mit Normalthermometer 2
7	500,000 °C	Kalibriert mit Normalthermometer 2

Daraus rekonstruierte Korrelationsmatrix $(\underline{R}_{TM} = \underline{R}_{RM})$

Rekonstruierte Korrelationsmatrix für die Ergebnisgröße (Temperaturwerte) an den Kalibrierpunkten

\underline{R}_{TM}

	keine Matrixformel	keine Korrelation!!!					
	T_{N1}	T_{N2}	T_{N3}	T_{N4}	T_{N5}	T_{N6}	T_{N7}
T_{N1}	1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
T_{N2}	0,0	1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
T_{N3}	0,0	0,0	1	0,0	0,0	0,0	0,0
T_{N4}	0,0	0,0	0,0	1	0,0	0,0	0,0
T_{N5}	0,0	0,0	0,0	0,0	1	0,0	0,0
T_{N6}	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1	0,0
T_{N7}	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1

Vorbereitung der Regression

Formulierungen in Matrizen-Gleichungen:

Designmatrix

$$\underline{A}_{TN} = \begin{pmatrix} 1 & T_{N1} & T_{N1}^2 \\ 1 & T_{N2} & T_{N2}^2 \\ 1 & T_{N3} & T_{N3}^2 \\ 1 & T_{N4} & T_{N4}^2 \\ 1 & T_{N5} & T_{N5}^2 \\ 1 & T_{N1} & T_{N6}^2 \\ 1 & T_{N1} & T_{N7}^2 \end{pmatrix}$$

Binomansatz:

$$\underline{R}_{MReki} = b_0 + b_1 \cdot \underline{T}_{Ni} + b_2 \cdot \underline{T}_{Ni}^2 \quad (i = 1 \dots 7)$$

$$\text{zu } \underline{R}_{MRek} = \underline{A}_{TN} \cdot \underline{b}$$

Binom entsprechend der Callendar-Gleichung
in Matrix-Form

mit der Spaltenmatrix
der Koeffizienten
(unbekannt)

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Vorbereitung der Regression

Die Regression für

$$\underline{R}_{M\text{Rek}} = \underline{A}_{TN} \cdot \underline{b}$$

muss in Bezug auf die Widerstandswerte ausgeführt werden, daher ist eine Umrechnung der Unsicherheiten der Temperaturwerte zu denjenigen der Widerstandswerte erforderlich.

Sensitivitätskoeffizient:

$$\frac{\partial \underline{R}_M}{\partial \underline{T}_N} = \underline{c}_{RT} = R_{OK} \cdot (A_K + 2 \cdot B_K \cdot \underline{T}_N)$$

Fortpflanzung der Unsicherheiten:

$$\underline{u}_{MR} = \underline{c}_{RT}^T \cdot \underline{u}_{MT}$$

Damit die diagonale Hilfsmatrix \underline{u}_{DRM} :

Diagonale Hilfsmatrix mit den Standardunsicherheiten der Ergebnisgröße (Widerstand) an den Kalibrierpunkten							
\underline{u}_{DRM}	keine Matrixformel						
	T_{N1}	T_{N2}	T_{N3}	T_{N4}	T_{N5}	T_{N6}	T_{N7}
T_{N1}	0,0039 Ω	0	0	0	0	0	0
T_{N2}	0	0,0039 Ω	0	0	0	0	0
T_{N3}	0	0	0,0038 Ω	0	0	0	0
T_{N4}	0	0	0	0,0037 Ω	0	0	0
T_{N5}	0	0	0	0	0,0053 Ω	0	0
T_{N6}	0	0	0	0	0	0,0069 Ω	0
T_{N7}	0	0	0	0	0	0	0,0083 Ω

Vorbereitung der Regression

Berechnung der Kovarianzmatrix \underline{S}_{RM} der Widerstandswerte aus der Korrelationsmatrix \underline{R}_{RM}

$$\underline{S}_{RM} = \underline{u}_{DMR} \cdot \underline{R}_{RM} \cdot \underline{u}_{DMR}^T$$

Kovarianzmatrix der Widerstandswerte als Ergebnisgröße an den Kalibrierpunkten							
\underline{S}_{RM} =MMULT(MMULT(C66:I72;C42:I48);C66:I72)							
	T_{N1}	T_{N2}	T_{N3}	T_{N4}	T_{N5}	T_{N6}	T_{N7}
T_{N1}	1,55E-05 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²
T_{N2}	0,00E+00 Ω ²	1,53E-05 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²
T_{N3}	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	1,44E-05 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²
T_{N4}	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	1,35E-05 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²
T_{N5}	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	2,86E-05 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²
T_{N6}	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	4,76E-05 Ω ²	0,00E+00 Ω ²
T_{N7}	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	0,00E+00 Ω ²	6,95E-05 Ω ²

Ausführung der Regression

Berechnung der Kovarianzmatrix der Binomkoeffizienten

$$\underline{S}_b = (\underline{A}_{TN}^T \cdot \underline{S}_{RM}^{-1} \cdot \underline{A}_{TN})^{-1}$$

Kovarianzmatrix der Polynom-Koeffizienten

\underline{S}_b

=MINV(MMULT(MTRANS(C24:E30);MMULT(MINV(C82:I88);C24:E30)))

	b_0	b_1	b_2
b_0	5,76E-06 Ω^2	-3,71E-08 Ω^2/K	5,23E-11 Ω^2/K^2
b_1	-3,71E-08 Ω^2/K	8,61E-10 Ω^2/K^2	-1,94E-12 Ω^2/K^3
b_2	5,23E-11 Ω^2/K^2	-1,94E-12 Ω^2/K^3	5,13E-15 Ω^2/K^4

Ausführung der Regression

Berechnung der neuen Binomkoeffizienten

$$\underline{b} = \underline{S}_b \cdot \underline{A}_{TN}^T \cdot \underline{S}_{RM}^{-1} \cdot \underline{R}_{MRek}$$

(Die Spaltenmatrix \underline{R}_{MRek} enthält die rekonstruierten Widerstandswerte.)

Spaltenmatrix der Binom-Koeffizienten	
\underline{b}	
b_0	100,0511 Ω
b_1	0,39071 $\Omega/^\circ\text{C}$
b_2	-5,6983E-05 $\Omega/^\circ\text{C}^2$

$$(\underline{R}_{MReg} = \underline{A}_{TN} \cdot \underline{b})$$

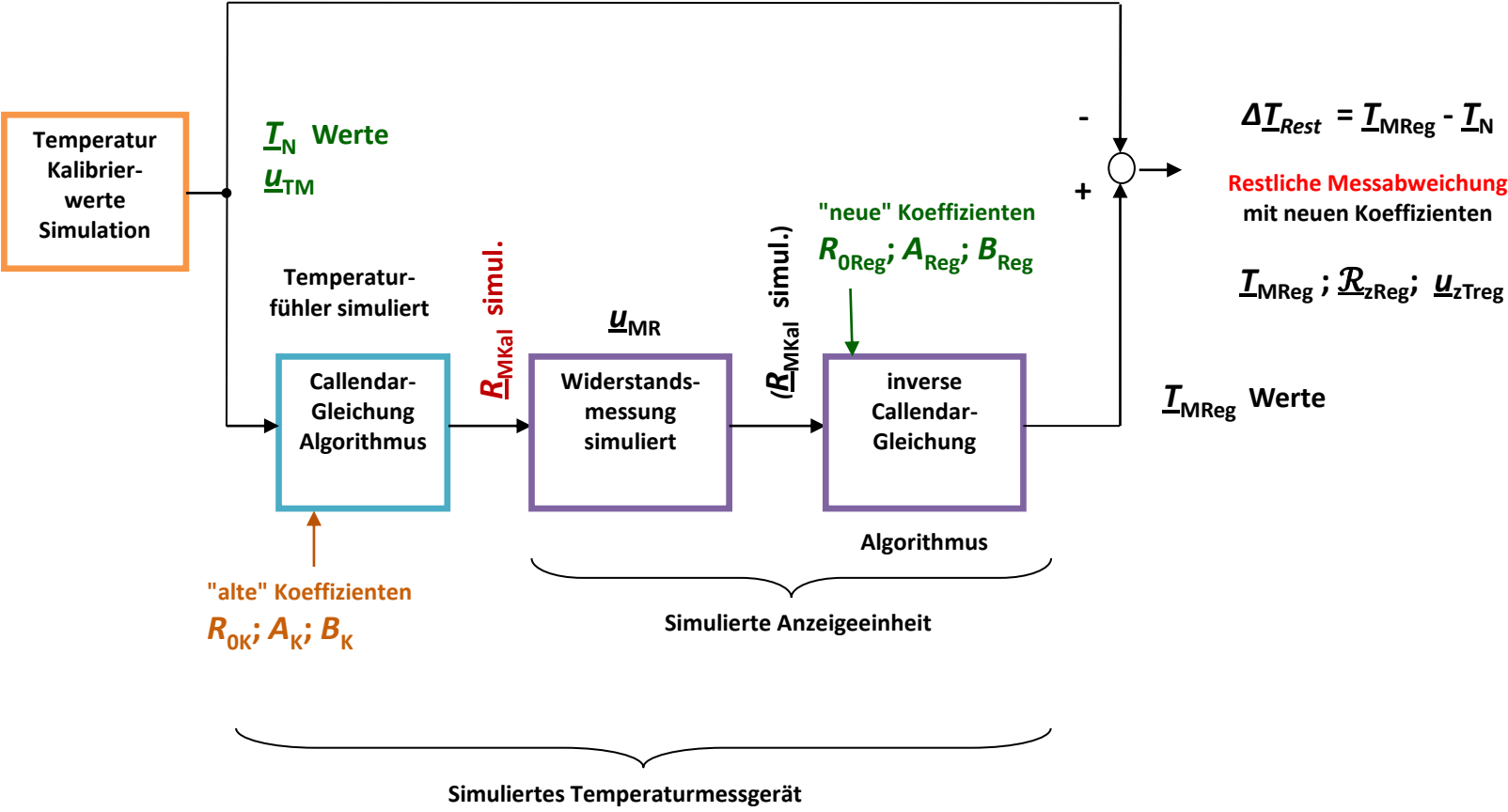
Umrechnung der Binomkoeffizienten in die Koeffizienten der Callendar-Gleichung

Neue Koeffizienten der Callendargleichung

$R_{0Reg} = b_0$	100,05109 Ω
$A_{Reg} = b_1/b_0$	3,90506E-03 $1/^\circ\text{C}$
$B_{Reg} = b_2/b_0$	-5,69541E-07 $1/^\circ\text{C}^2$

$$\underline{R}_{MReg} = R_{0Reg} \cdot (1 + A_{Reg} \cdot \underline{T}_N + B_{Reg} \cdot \underline{T}_N^2)$$

Simulation



Blockdiagramm: Simulation an den Kalibrierpunkten

Simulation

Inverse Callendar-Gleichung, simuliert die Anzeigeeinheit mit "neuen" Koeffizienten

$$\underline{T}_{MReg} = f^{-1}(\underline{R}_{MRek}) = -\frac{A_{Reg}}{2 \cdot B_{Reg}} - \sqrt{\frac{\frac{\underline{R}_{MRek}}{R_{0Reg}} - 1}{B_{Reg}} + \left(\frac{A_{Reg}}{2 \cdot B_{Reg}}\right)^2}$$

Berechnung der Werte an den Kalibrierpunkten

(zum Vergleich)

Laufende Nummer	Temperaturvorgabewerte	Inverse Callendar-Gl.	Abweichung der Regression	Abweichung mit den alten Koeffizienten
i	\underline{T}_N	\underline{T}_{MReg}	$\underline{T}_{MReg} - \underline{T}_N$	$\Delta \underline{T}_M$
1	-30 °C	-30,022 °C	-0,022 K	-0,016 K
2	0 °C	0,002 °C	0,002 K	0,002 K
3	100 °C	100,041 °C	0,041 K	0,029 K
4	200 °C	200,002 °C	0,002 K	-0,004 K
5	300 °C	299,935 °C	-0,065 K	-0,047 K
6	400 °C	399,974 °C	-0,026 K	0,036 K
7	500 °C	500,075 °C	0,075 K	0,204 K

Simulationsergebnis

Simulation der Abweichungen des Normalthermometers, an den Kalibrierpunkten mit den neuen Koeffizienten in der Anzeigeeinheit

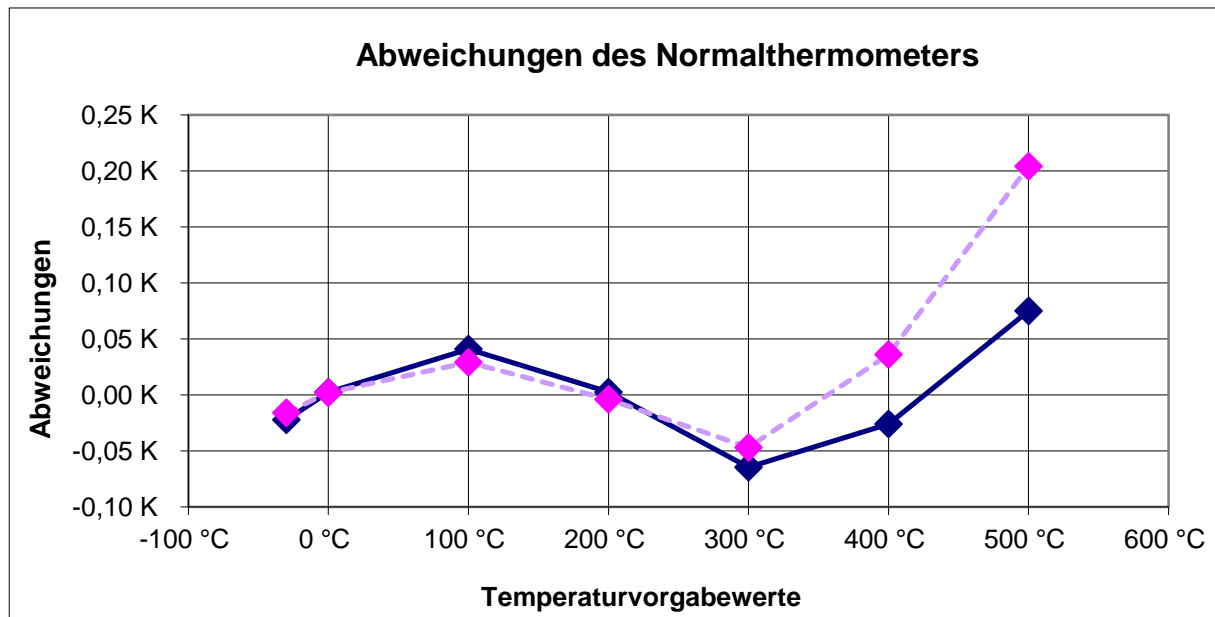


Diagramm: Abweichung des Normalthermometers mit alten und neuen Koeffizienten

Simulationsergebnis

Simulation der Kovarianzmatrix der Abweichungen des Normalthermometers, an den Kalibrierpunkten mit den neuen Koeffizienten in der Anzeigeeinheit

Kovarianzmatrix:
$$\underline{S}_{zRReg} = \underline{A}_{TN} \cdot \underline{S}_b \cdot \underline{A}_{TN}^T$$

(Fortpflanzung der Kovarianzen der Koeffizienten zu denjenigen der Widerstandswerte der Kalibrierpunkte)

Kovarianz der Widerstandswerte aus der Regression an den Kalibrierpunkten							
\underline{S}_{zRReg}	=MMULT(C24:E30;MMULT(C100:E102;MTRANS(C24:E30)))						
	T_{N1}	T_{N2}	T_{N3}	T_{N4}	T_{N5}	T_{N6}	T_{N7}
T_{N1}	8,97E-06 Ω ²	6,93E-06 Ω ²	1,61E-06 Ω ²	-1,41E-06 Ω ²	-2,13E-06 Ω ²	-5,49E-07 Ω ²	3,33E-06 Ω ²
T_{N2}	6,93E-06 Ω ²	5,76E-06 Ω ²	2,58E-06 Ω ²	4,33E-07 Ω ²	-6,64E-07 Ω ²	-7,14E-07 Ω ²	2,83E-07 Ω ²
T_{N3}	1,61E-06 Ω ²	2,58E-06 Ω ²	4,63E-06 Ω ²	4,89E-06 Ω ²	3,36E-06 Ω ²	1,81E-08 Ω ²	-5,12E-06 Ω ²
T_{N4}	-1,41E-06 Ω ²	4,33E-07 Ω ²	4,89E-06 Ω ²	6,76E-06 Ω ²	6,04E-06 Ω ²	2,72E-06 Ω ²	-3,19E-06 Ω ²
T_{N5}	-2,13E-06 Ω ²	-6,64E-07 Ω ²	3,36E-06 Ω ²	6,04E-06 Ω ²	7,38E-06 Ω ²	7,39E-06 Ω ²	6,07E-06 Ω ²
T_{N6}	-5,49E-07 Ω ²	-7,14E-07 Ω ²	1,81E-08 Ω ²	2,72E-06 Ω ²	7,39E-06 Ω ²	1,40E-05 Ω ²	2,27E-05 Ω ²
T_{N7}	3,33E-06 Ω ²	2,83E-07 Ω ²	-5,12E-06 Ω ²	-3,19E-06 Ω ²	6,07E-06 Ω ²	2,27E-05 Ω ²	4,66E-05 Ω ²

Simulationsergebnis

Simulation der zur Kovarinzmatrix gehörigen diagonalen Hilfsmatrix

Digitale Hilfsmatrix \underline{u}_{DzRReg} entsprechend der Kovarianzmatrix \underline{S}_{zRReg} (Wurzeln der Diagonalelemente) :

Diagonale Hilfsmatrix mit den Standardunsicherheiten der Regressionsfunktion an den Kalibrierpunkten							
\underline{u}_{DzRReg}	keine Matrixformel						
	T_{N1}	T_{N2}	T_{N3}	T_{N4}	T_{N5}	T_{N6}	T_{N7}
T_{N1}	2,995E-03 Ω	0	0	0	0	0	0
T_{N2}	0	2,401E-03 Ω	0	0	0	0	0
T_{N3}	0	0	2,153E-03 Ω	0	0	0	0
T_{N4}	0	0	0	2,601E-03 Ω	0	0	0
T_{N5}	0	0	0	0	2,717E-03 Ω	0	0
T_{N6}	0	0	0	0	0	3,747E-03 Ω	0
T_{N7}	0	0	0	0	0	0	6,824E-03 Ω

Simulationsergebnis

Fortpflanzung der Unsicherheiten der Werte der Widerstandsabweichungen zu denjenigen der Temperaturabweichungen

Sensitivitätskoeffizienten:

$$\frac{\partial \underline{T}_{\text{Reg}}}{\partial \underline{R}_{\text{Reg}}} = \underline{c}_{\text{TR}} = \frac{1}{R_{0\text{Reg}} \cdot (A_{\text{Reg}} + 2 \cdot B_{\text{Reg}} \cdot \underline{T}_{\text{N}})}$$

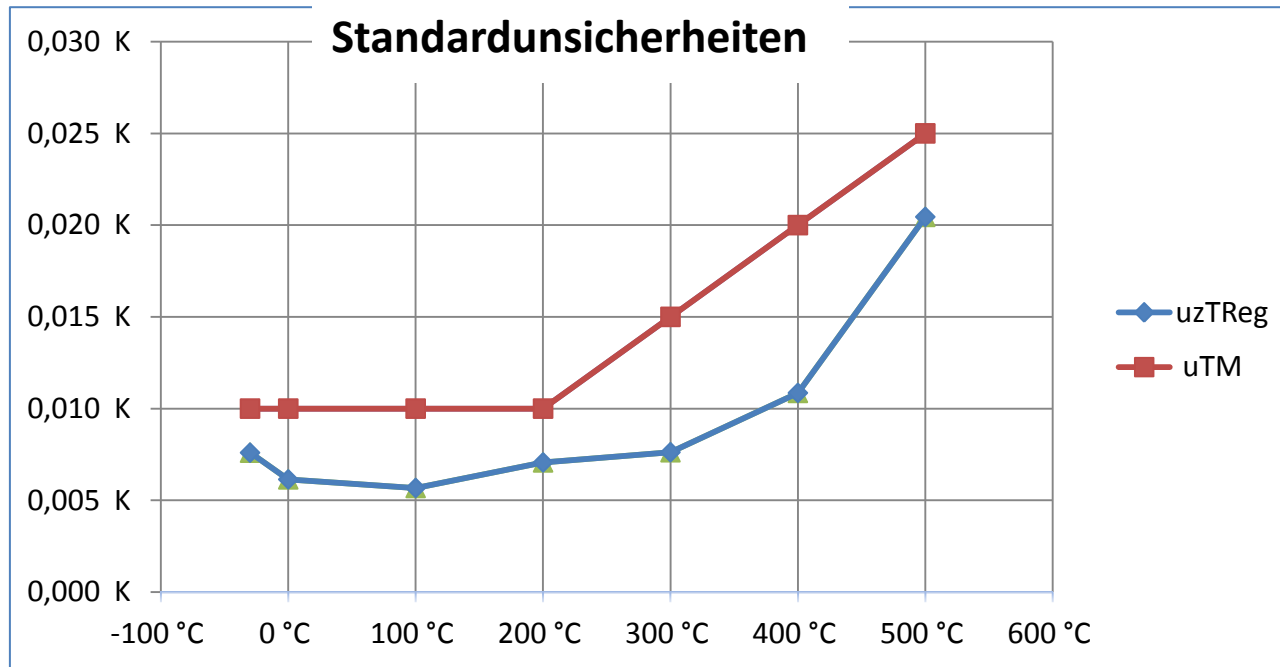
damit:

$$\underline{u}_{\text{zTReg}} = \underline{u}_{\text{zRReg}} \cdot \underline{c}_{\text{TR}}^T$$

	MU Widerstand	MU Temperatur	MU gemäß Kalibrierschein
\underline{T}_{N}	$\underline{u}_{\text{zRReg}}$	$\underline{u}_{\text{zTReg}}$	$\underline{u}_{\text{TM}}$
-30,000 °C	0,0030 Ω	0,008 K	0,010 K
0,000 °C	0,0024 Ω	0,006 K	0,010 K
100,000 °C	0,0022 Ω	0,006 K	0,010 K
200,000 °C	0,0026 Ω	0,007 K	0,010 K
300,000 °C	0,0027 Ω	0,008 K	0,015 K
400,000 °C	0,0037 Ω	0,011 K	0,020 K
500,000 °C	0,0068 Ω	0,020 K	0,025 K

Simulationsergebnis

Darstellung der Standardunsicherheiten aus Regressionsergebnis im Vergleich zu denjenigen aus dem Kalibrierschein



Simulationsergebnis

Korrelationen: (Die Korrelationsmatrix der Werte der Widerstände ist identisch mit der der Temperatur (!!))

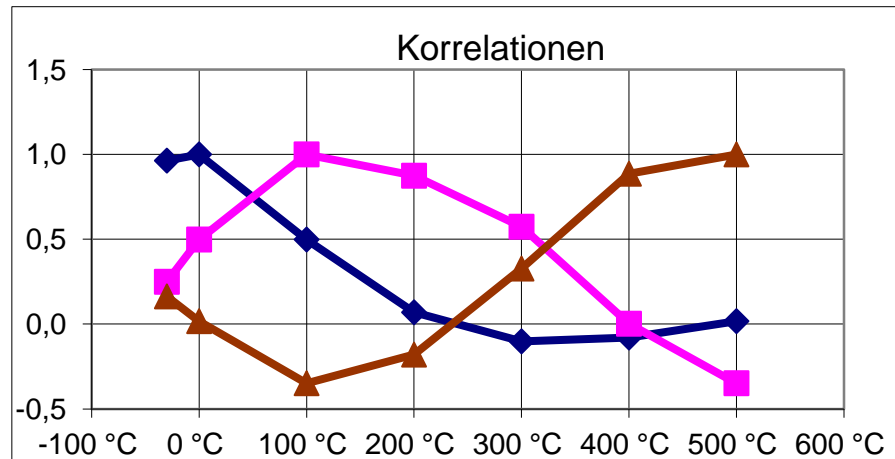
Korrelationsmatrix: $\mathcal{R}_{zReg} = \underline{u}_{DzRReg}^{-1} \cdot \underline{S}_{zRReg} \cdot (\underline{u}_{DzRReg}^{-1})^T$

Korrelationsmatrix der Regressionsfunktion an den Kalibrierpunkten

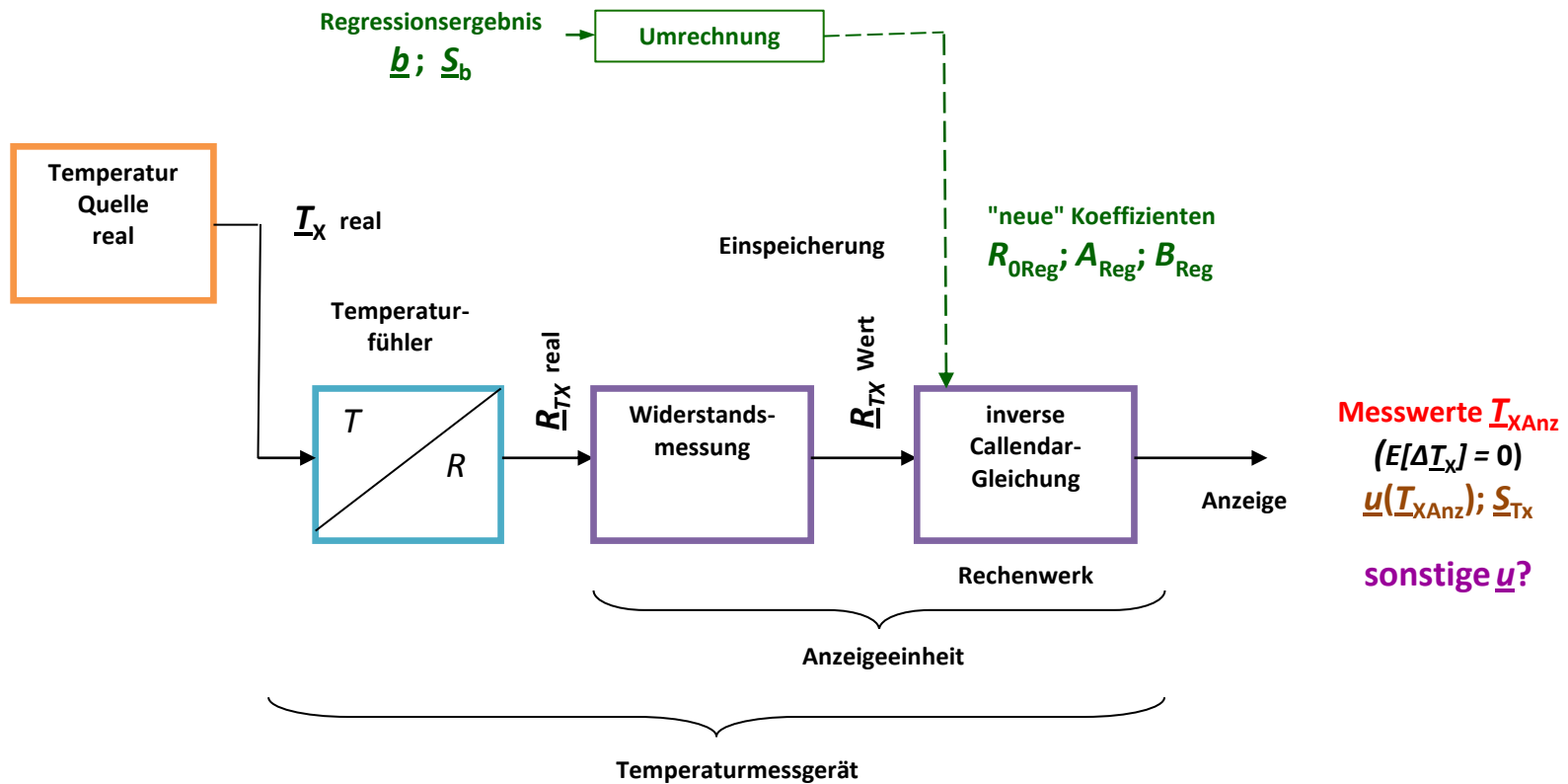
\mathcal{R}_{zReg} =MMULT(MINV(C171:I177);MMULT(C159:I165;MINV(C171:I177)))

		T_{N1}	T_{N2}	T_{N3}	T_{N4}	T_{N5}	T_{N6}	T_{N7}
-30,000 °C	T_{N1}	1	0,96	0,25	-0,18	-0,26	-0,05	0,16
0,000 °C	T_{N2}	0,96	1	0,50	0,07	-0,10	-0,08	0,02
100,000 °C	T_{N3}	0,25	0,50	1	0,87	0,57	0,00	-0,35
200,000 °C	T_{N4}	-0,18	0,07	0,87	1	0,85	0,28	-0,18
300,000 °C	T_{N5}	-0,26	-0,10	0,57	0,85	1	0,73	0,33
400,000 °C	T_{N6}	-0,05	-0,08	0,00	0,28	0,73	1	0,89
500,000 °C	T_{N7}	0,16	0,02	-0,35	-0,18	0,33	0,89	1

Graphische Darstellung einiger Korrelationen



Anwendung des Normalthermometers



Blockdiagramm: Reale Messung

Anwendung des Normalthermometers

Das Normalthermometer soll an 5 beliebig gewählten Messpunkten eingesetzt werden.

Rückrechnung der
Widerstandswerte aus den
Anzeigewerten \underline{T}_{xAnz} :

$$\underline{R}_{MTx} = R_{0Reg} \cdot (1 + A_{Reg} \cdot \underline{T}_{xAnz} + B_{Reg} \cdot \underline{T}_{xAnz}^2)$$

	Ablesewerte	Sensorsignale	Referenzwert
	neue Temperatur- messpunkte	zugehörige Widerstandswerte (rekonstruiert)	Sensortemperatur (simuliert)
	\underline{T}_{xAnz}	\underline{R}_{MTx}	\underline{T}_{xRef}
T_{xAnz1}	0,000 °C	100,0615 Ω	0,000 °C
T_{xAnz2}	80,000 °C	130,9516 Ω	80,000 °C
T_{xAnz3}	160,000 °C	161,1142 Ω	160,000 °C
T_{xAnz4}	240,000 °C	190,5495 Ω	240,000 °C
T_{xAnz5}	320,000 °C	219,2573 Ω	320,000 °C
		mit neuen Koeffizienten	mit Umkehrfunktion

Anwendung des Normalthermometers

Bestimmung der Kovarianzen der Temperaturmesswerte.

(Fortpflanzung der Kovarianzen der Koeffizienten der Regressionsfunktion zu denjenigen der Temperaturmesswerte)

Allgemeine Form der

Fortpflanzungsfunktion: $F(\underline{T}_{xAnz}; R_{MTx}) = 0 = -R_{MTx} + b_0 + b_1 \cdot T_{xAnz} + b_2 \cdot T_{xAnz}^2$

Bilden der Jacobi-Matrix 1:

$$\underline{F}'_b = \frac{\partial F(\underline{T}_{xAnz}; R_{MTx})}{\partial \underline{b}} = \begin{pmatrix} 1 & T_{xAnz1} & T_{xAnz1}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & T_{xAnz5} & T_{xAnz5}^2 \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen nach den Koeffizienten

\underline{F}'_b

keine Matrixformel

	b_0	b_1	b_2
T_{x1}	1	0,000 °C	0,00 °C ²
T_{x2}	1	80,000 °C	6400,00 °C ²
T_{x3}	1	160,000 °C	25600,00 °C ²
T_{x4}	1	240,000 °C	57600,00 °C ²
T_{x5}	1	320,000 °C	102400,00 °C ²

Anwendung des Normalthermometers

Bilden der
Jacobi-Matrix 2:

$$\underline{F}'_T = \frac{\partial F(\underline{T}_{xAnz}; \underline{R}_{MTx})}{\partial \underline{T}_{xAnz}} = \begin{pmatrix} b_1 + 2 \cdot b_2 \cdot T_{xAnz1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + 2 \cdot b_2 \cdot T_{xAnz5} \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen nach der Temperatur (Zielgröße)

\underline{F}'_T

keine Matrixformel

	T_{x1}	T_{x2}	T_{x3}	T_{x4}	T_{x5}
T_{x1}	-0,391 Ω/°C	0	0	0	0
T_{x2}	0	-0,382 Ω/°C	0	0	0
T_{x3}	0	0	-0,372 Ω/°C	0	0
T_{x4}	0	0	0	-0,363 Ω/°C	0
T_{x5}	0	0	0	0	-0,354 Ω/°C

Anwendung des Normalthermometers

Bilden der Sensitivitätsmatrix:

$$\underline{Q}_{Tb} = -(\underline{F}'_T)^{-1} \underline{F}'_b$$

Fortpflanzungsmatrix Koeffizienten nach Temperaturwerten

\underline{Q}_{Tb}

=MMULT(MINV(C247:G251);C237:E241)

	b_0	b_1	b_2
T_{x1}	-2,55947	0,00000	0,00000
T_{x2}	-2,62062	-209,64992	-16771,99383
T_{x3}	-2,68477	-429,56343	-68730,14844
T_{x4}	-2,75214	-660,51312	-158523,14867
T_{x5}	-2,82297	-903,35114	-289072,36598

Die Einheiten der Werte der Matrixelemente wurden weggelassen, sie sind in diesem Zwischenschritt der Berechnung nicht von Bedeutung

Bilden der Kovarianzmatrix:

$$\underline{S}_{Tx} = \underline{Q}_{Tb} \cdot \underline{S}_b \cdot \underline{Q}_{Tb}^T$$

Kovarianzmatrix der Temperturwerte

\underline{S}_{Tx}

=MMULT(C256:E260;MMULT(C100:E102;MTRANS(C256:E260)))

	T_{x1}	T_{x2}	T_{x3}	T_{x4}	T_{x5}
T_{x1}	3,777E-05 K ²	2,099E-05 K ²	8,000E-06 K ²	-9,257E-07 K ²	-5,472E-06 K ²
T_{x2}	2,099E-05 K ²	2,905E-05 K ²	3,124E-05 K ²	2,709E-05 K ²	1,614E-05 K ²
T_{x3}	8,000E-06 K ²	3,124E-05 K ²	4,398E-05 K ²	4,543E-05 K ²	3,473E-05 K ²
T_{x4}	-9,257E-07 K ²	2,709E-05 K ²	4,543E-05 K ²	5,337E-05 K ²	5,009E-05 K ²
T_{x5}	-5,472E-06 K ²	1,614E-05 K ²	3,473E-05 K ²	5,009E-05 K ²	6,196E-05 K ²

Anwendung des Normalthermometers

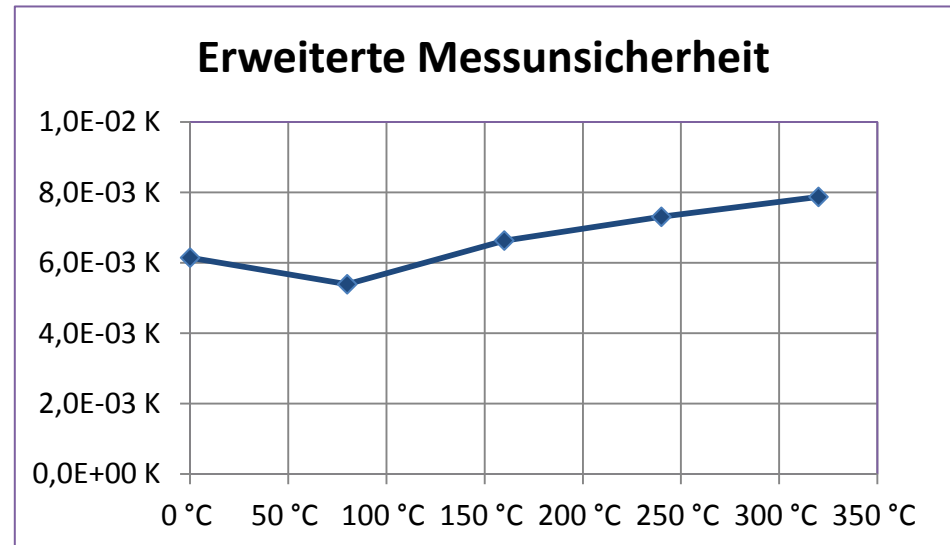
Bestimmung der diagonalen Hilfsmatrix aus der Kovarianzmatrix:

Diagonale Hilfsmatrix mit den Standardmessunsicherheiten

\underline{u}_{DTX} keine Matrixformel

	T_{x1}	T_{x2}	T_{x3}	T_{x4}	T_{x5}	
0 °C	T_{x1}	6,145E-03 K	0	0	0	
80 °C	T_{x2}	0	5,390E-03 K	0	0	
160 °C	T_{x3}	0	0	6,631E-03 K	0	
240 °C	T_{x4}	0	0	0	7,305E-03 K	
320 °C	T_{x5}	0	0	0	0	7,872E-03 K

Werte der Messunsicherheit \underline{u}_{TX} aus der diagonalen Hilfsmatrix für das Diagramm ($k = 2$)



Anwendung des Normalthermometers

Bestimmung der Korrelationsmatrix: $\underline{R}_T = \underline{u}_{DTx}^{-1} \cdot \underline{S}_{Tx} \cdot (\underline{u}_{DTx}^{-1})^T$

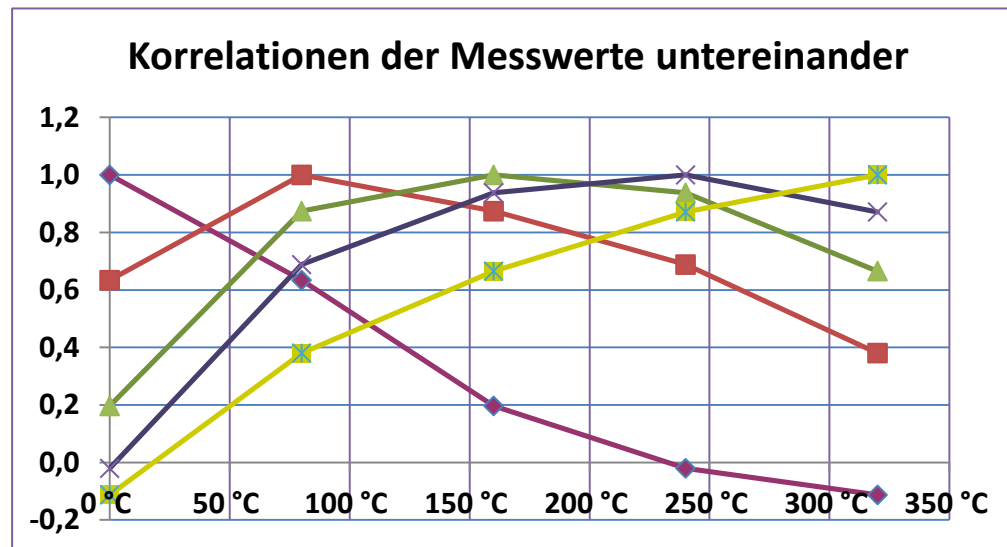
Korrelationsmatrix der Temperaturwerten

\underline{R}_{Tx}

=MMULT(MINV(C274:G278);MMULT(C265:G269;MINV(C274:G278)))

		T_{x1}	T_{x2}	T_{x3}	T_{x4}	T_{x5}
0 °C	T_{x1}	1,0	0,6	0,2	0,0	-0,1
80 °C	T_{x2}	0,6	1,0	0,9	0,7	0,4
160 °C	T_{x3}	0,2	0,9	1,0	0,9	0,7
240 °C	T_{x4}	0,0	0,7	0,9	1,0	0,9
320 °C	T_{x5}	-0,1	0,4	0,7	0,9	1,0

Diagramm der Korrelationen der Temperaturwerte untereinander



Weitere Unsicherheitsbeiträge

Unsicherheit durch ...

- ... die Näherung der Callendar-Gleichung an die IST 90 Skala
(**Algorithmenfehler**)
- ... die **Diskretisierung** und **Fluktuationen** der Anzeige
- ... den **Wärmeübergang** vom Medium zum Temperatursensor
- ... die **Langzeitdrift des PRT-Sensors**, einschließlich der nicht reversiblen Veränderung durch "Überfahren" oder Stressen des Sensors
- ... die **Langzeitdrift der Widerstandsbestimmung** in der Anzeigeeinheit
- ... nicht systematische Abweichungen bei der **Widerstandsmessung**
(EMV, Thermospannungen, ...)

Zusammenfassung

Gewählte Vorgehensweise:

- Konsequente Anwendung der Matrizenrechnung in EXCEL für Regression und Fortpflanzung der Kovarianzen
- Besonderer Fokus auf die möglicherweise auftretenden Korrelationen
- Aufbau der Rechenschritte gemäß einer Zusammenstellung von Matrixgleichungen und Algorithmen aus einer Formelsammlung (speziell für Messunsicherheitsanalysen)
- Modularisierung der Rechenschritte zur leichten Nachvollziehbarkeit

Zusammenfassung

Ergebnisse:

- Optimale aktuelle Koeffizienten der Callendargleichung bestimmt
- Direkte Anwendung des Normalthermometers im gesamten Messbereich ohne weitere Korrektur ermöglicht
- Messunsicherheitsbeiträge im gesamten Messbereich angebar
- Korrelationen von Ergebnisgrößen untereinander verfügbar

Zusammenfassung

Bewertung des Ergebnisses

- Vollständiger logischer, nachvollziehbarer Gang der Analyse
- Eleganz der Matrizenrechnung für die Analyse
- Schwieriger Zugang zur anzuwendenden Formulierung, da praxisgerechte Darstellung der Grundlagen fehlt und kaum einfache Beispiele verfügbar zu sein scheinen
- Der Aufwand für die Analyse erscheint hoch, bei hohem Schwierigkeitsgrad . Er ist kaum zumutbar für ein kleines Kalibrierlabor. (Problem nicht lösbar?)
- Wirklich zufriedenstellende alternative Analyseverfahren sind für die vorliegende Problemstellung kaum entwickelt .

Zusammenfassung

Anmerkungen

- Die weit verbreitete Scheu vor Matrizenrechnungen ist bei Verwendung von EXCEL nicht mehr begründet. (Erfordert aber eine gewisse Einarbeit)
- Ein Problem als nicht relevant anzusehen, weil man keine Lösung hat, ist unbefriedigend. (Der Fuchs und die Trauben). Es gab kaum Mittstreiter.
- Wünschenswert wäre ein koordiniertes Vorgehen, mit dem Ziel eine abgesicherte leicht anwendbare Formelsammlung verfügbar zu machen, einschließlich exemplarischer Beispiele.
- Mir hat die Beschäftigung mit dem Problem und deren Lösung nach anfänglichem schweren Einstieg Spaß bereitet.

Literatur

- [1] DIN 1319-4 Grundbegriffe der Messtechnik Teil 4
Auswertung von Messungen, Messunsicherheit
(Für den Fall, dass die Messgrößen mittels gegebener Funktionen
aus anderen Größen berechnet werden)
- [2] **K. WEISE; W. WÖGER Meßunsicherheit und Messdatenauswertung**
Wiley – VCH Verlag, Weinheim, 1999
- [3] DIN EN 60751 Industrielle Platin-Widerstandsthermometer und
Platin-Messwiderstände
- [4] Handbuch der Temperaturanzeigeinheit für PRT AMETEK DTI 1000
Firmenhandbuch
- [5] Matrizenrechnung Grundlagen für die praktische Anwendung
VDI 2739 Blatt 1 (zurückgezogen!)
- [6] Evaluation of measurement data – Supplement 2
to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" -
Extension to any number of output quantities
JCGM 102 (Draft)
- [7] Platin Widerstandsthermometer Norm IEC 751 / DIN EN 60751 + A2
- [8] ISO 80000-1
- [9] **Formelsammlung zur Behandlung von Messunsicherheitsproblemen mit Matrizen**
(privat)