

Messunsicherheitsbilanz für die Bereichskalibrierung

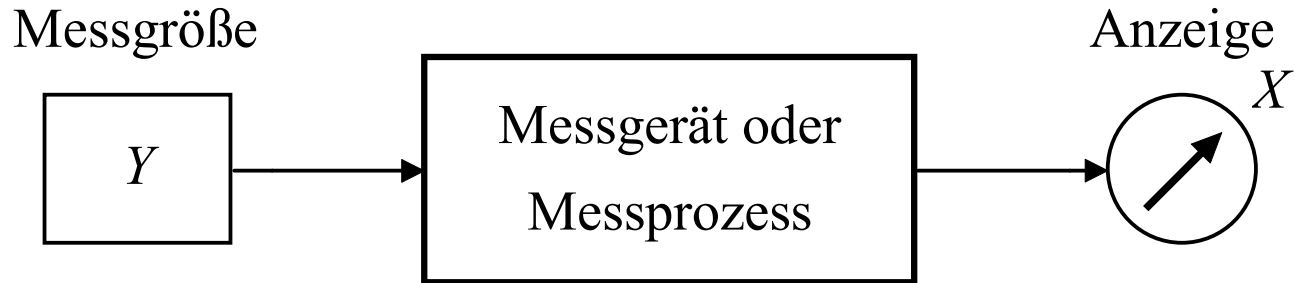
Rüdiger Kessel
PTB Braunschweig
ruediger.kessel@ptb.de

Inhalt

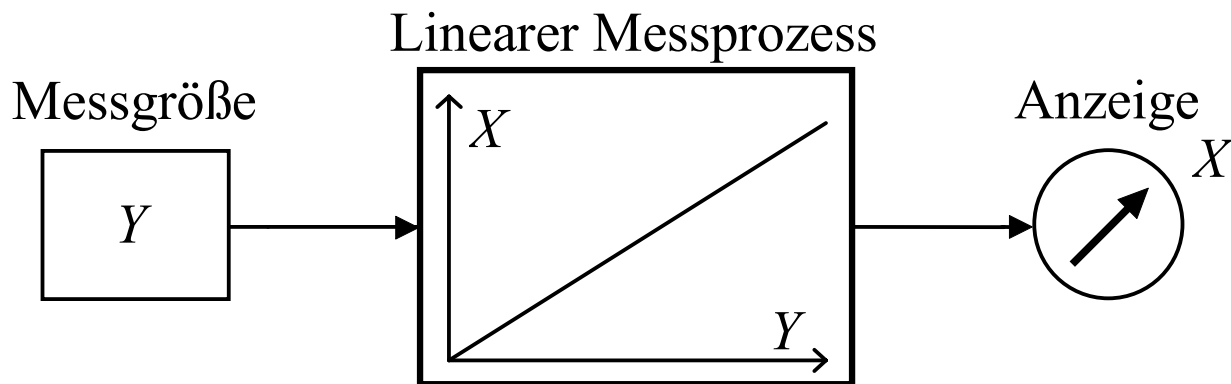
- Kalibrierung eines linearen Messprozesses
 - Modell des Messprozesses
 - Ableitung der Mess- und Kalibriergleichungen
 - Messunsicherheitsbudgets
 - Messgenauigkeit
- Kalibrierung von nichtlinearen Messprozessen
 - Virtueller linearer Messprozess
 - Korrekturfunktionen
 - Messunsicherheitsbudgets mit Korrekturfunktion
 - Messgenauigkeit mit Korrekturfunktion
 - Vorhersage der Messunsicherheit

Untersuchte Messverfahren

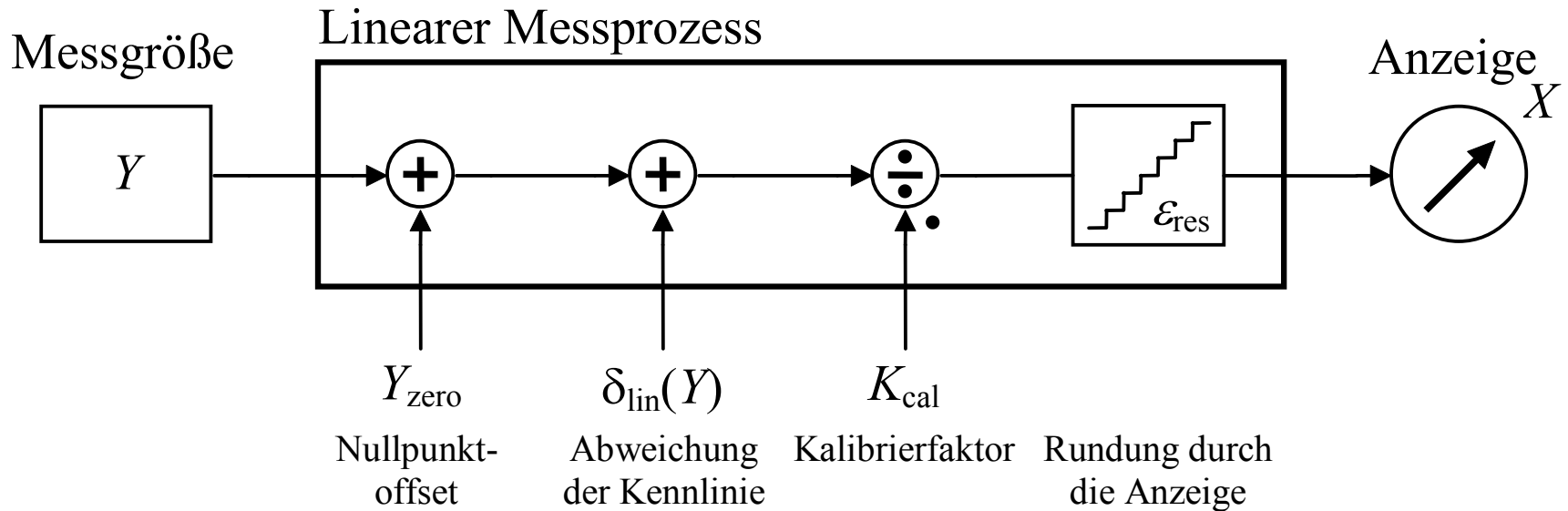
Direkte Messung:



Im Ersten Schritt: Messprozesse mit linearer Kennlinie



Modell des linearen Messprozesses



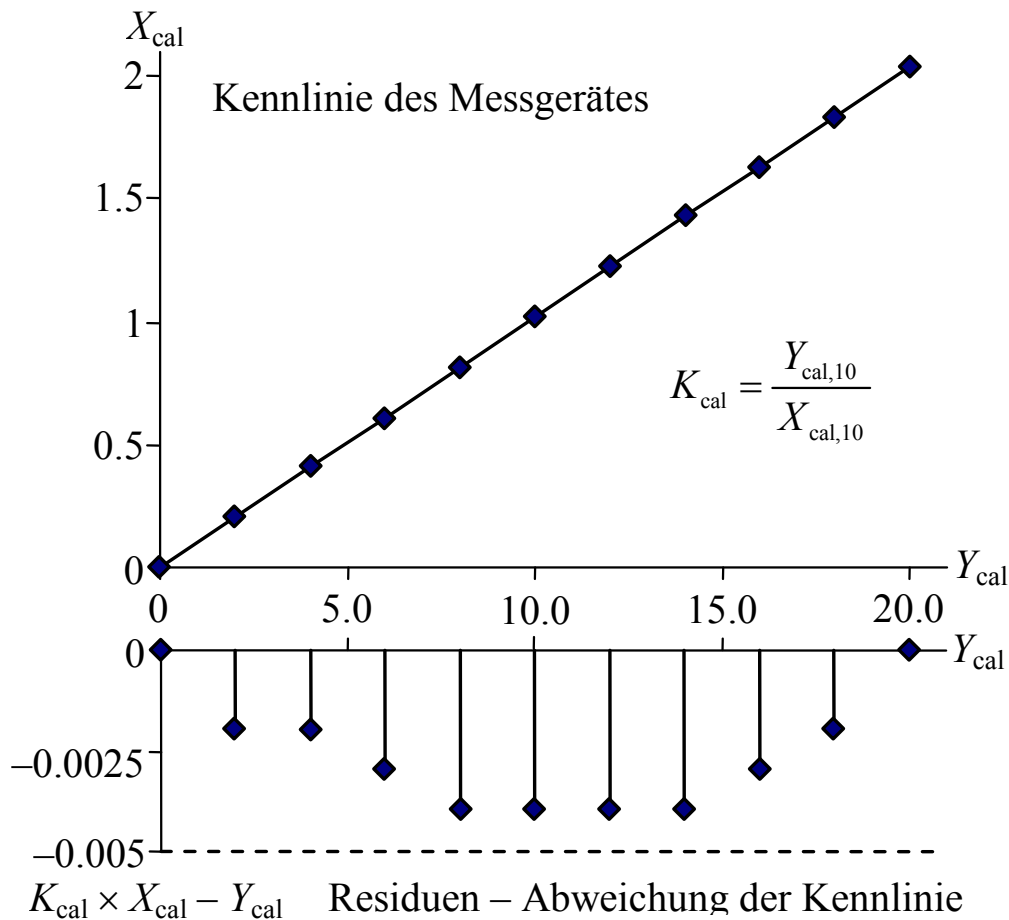
Messprozessgleichung:
$$\text{round}\left(\frac{Y + Y_{\text{zero}} + \delta_{\text{lin}}(Y)}{K_{\text{cal}}}, \epsilon_{\text{res}}\right) = X$$

Messgleichung:
$$Y_i = (X_i + \delta X_{\text{res},i}) \cdot K_{\text{cal}} - \delta_{\text{lin}}(Y)_i - Y_{\text{zero}}$$

Im Rahmen der Kalibrierung zu bestimmen: K_{cal} , Y_{zero} und $\delta_{\text{lin}}(Y)_i$

Untersuchung eines realen Messgerätes

Punkt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Y_{cal,i}$	0.0	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0	14.0	16.0	18.0	20.0
$X_{cal,i}$	0.0000	0.2039	0.4080	0.6120	0.8160	1.0201	1.2242	1.4283	1.6325	1.8367	2.0410



Punkt 0 wird zur Bestimmung von Y_{zero} benutzt.

Punkt 10 wird für die Bestimmung von K_{cal} benutzt.
(Annahme $Y_{zero} = 0$)

Die Residuen werden zur Ableitung ein Spezifikation für Abweichung der Kennlinie genutzt:

$$\left| \delta_{lin}(Y)_i \right| < \varepsilon_{lin}$$

Ableitung der Kalibriergleichungen

Messprozessgleichung:
$$\frac{Y + Y_{\text{zero}} + \delta_{\text{lin}}(Y)}{K_{\text{cal}}} = X + \delta X_{\text{res}}$$

Kalibrierung mit 2 Punkten:
$$\begin{aligned} & \left(X_{\text{cal},l}, Y_{\text{cal},l} \right) \quad (\text{Nullpunkt}) \\ & \left(X_{\text{cal},u}, Y_{\text{cal},u} \right) \quad (\text{Bereichsende}) \end{aligned}$$

Hinweis: In den Kalibrierpunkten ist die Abweichung der Kennlinie von einer Geraden per Definition gleich null.

$$K_{\text{cal}} = \frac{Y_{\text{cal},u} - Y_{\text{cal},l}}{\left(X_{\text{cal},u} + \delta X_{\text{res},u} \right) - \left(X_{\text{cal},l} + \delta X_{\text{res},l} \right)}$$

$$Y_{\text{zero}} = K_{\text{cal}} \times \left(X_{\text{cal},l} + \delta X_{\text{res},l} \right) - Y_{\text{cal},l}$$

Messunsicherheitsbudgets

Kalibrierfaktor

Größe	Wert	Standardmess- unsicherheit	Sensitivitäts- koeffizient	Unsicherheits- beitrag	Beitrags- koeffizient
$Y_{cal,10}$	20.00000	2.3×10^{-3}	0.49	1.1×10^{-3}	97.1 %
$X_{cal,10}$	2.041				
$X_{cal,0}$	0.0				
$\delta X_{res,10}$	0.0	29×10^{-6}	-4.8	-140×10^{-6}	1.5 %
$\delta X_{res,0}$	0.0	29×10^{-6}	4.8	140×10^{-6}	1.5 %
K_{cal}	9.7991	1.1×10^{-3}			

Messung in der Mitte des Bereichs

Größe	Wert	Standardmess- unsicherheit	Sensitivitäts- koeffizient	Unsicherheits- beitrag	Beitrags- koeffizient
Y_{zero}	0.0	29×10^{-6}	-1.0	-29×10^{-6}	0.0 %
K_{cal}	9.7991	1.1×10^{-3}	1.0	1.1×10^{-3}	13.0 %
X_5	1.0201				
$\delta X_{res,5}$	0.0	29×10^{-6}	9.8	280×10^{-6}	0.8 %
$\delta_{lin}(Y)_{,5}$	0.0	2.9×10^{-3}	-1.0	-2.9×10^{-3}	86.1 %
Y_5	9.9961	3.1×10^{-3}			

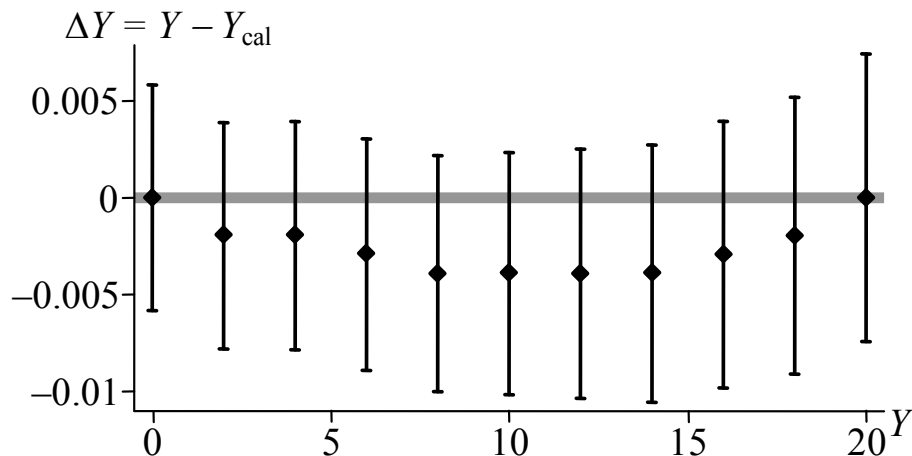
Messgenauigkeit des Messgerätes

Größe	Wert	Erweiterte Unsicherheit	Erweiterungsfaktor
Y_0	0.0	5.8×10^{-3}	2.00
Y_1	1.9980	5.8×10^{-3}	2.00
Y_2	3.9980	5.9×10^{-3}	2.00
Y_3	5.9971	6.0×10^{-3}	2.00
Y_4	7.9961	6.1×10^{-3}	2.00
Y_5	9.9961	6.2×10^{-3}	2.00
Y_6	11.9961	6.4×10^{-3}	2.00
Y_7	13.9961	6.6×10^{-3}	2.00
Y_8	15.9971	6.9×10^{-3}	2.00
Y_9	17.9980	7.1×10^{-3}	2.00
Y_{10}	20.0000	7.4×10^{-3}	2.00

Ablesungen müssen mit $K_{\text{cal}} = 9,7991$ multipliziert werden,

dann kann über den gesamten Bereich eine Messunsicherheit kleiner gleich $7,4 \times 10^{-3}$ erreicht werden

und die Messabweichungen liegen innerhalb der erweiterten Messunsicherheit.

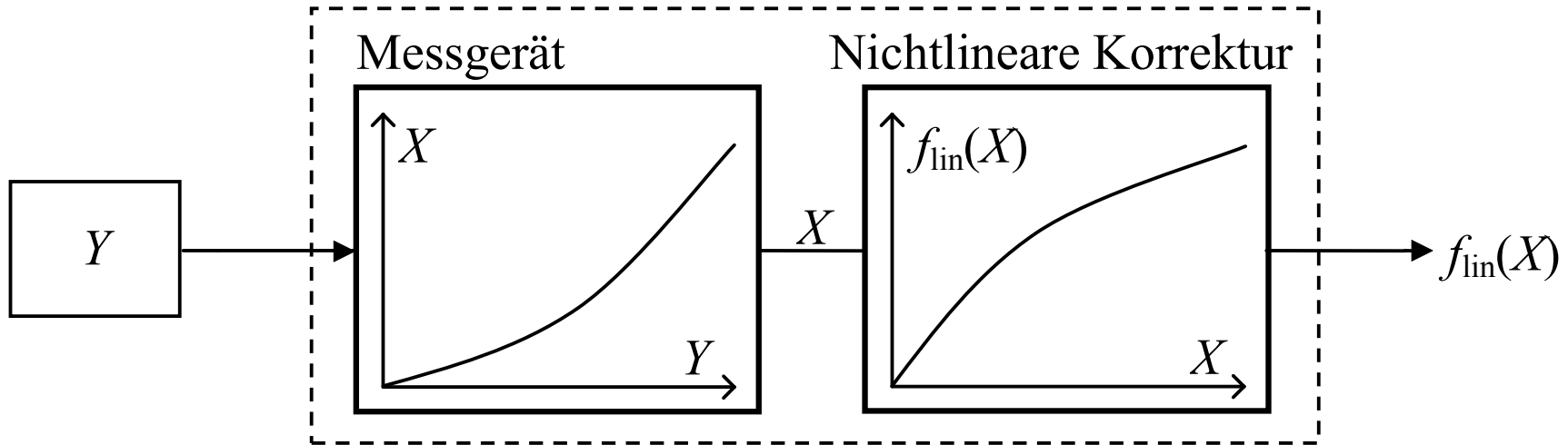


Eine Vorhersage der Messunsicherheit ist möglich.

Messgenauigkeit wird als Vorhersage der Messunsicherheit verstanden.

Nichtlineare Messgeräte

Virtueller linearer Messprozess



Messprozessgleichung:
$$\frac{Y + Y_{\text{zero}} + \delta_{\text{lin}}(Y)}{K_{\text{cal}}} = f_{\text{lin}}(X + \delta X_{\text{res}})$$

Messgleichung:
$$Y_i = f_{\text{lin}}(X_i + \delta X_{\text{res},i}) \times K_{\text{cal}} - \delta_{\text{lin}}(Y)_i - Y_{\text{zero}}$$

Kalibriergleichungen:
$$K_{\text{cal}} = \frac{Y_{\text{cal},u} - Y_{\text{cal},l}}{f_{\text{lin}}(X_{\text{cal},u} + \delta X_{\text{res},u}) - f_{\text{lin}}(X_{\text{cal},l} + \delta X_{\text{res},l})}$$

$$Y_{\text{zero}} = K_{\text{cal}} \times f_{\text{lin}}(X_{\text{cal},l} + \delta X_{\text{res},l}) - Y_{\text{cal},l}$$

Beispiel für eine Korrekturfunktion

$$f_{\text{lin}}(X) = a + b \times X + c \times X^2 + d \times X^3$$

$$a = 0$$

$$b = 9.806$$

$$c = -2.251 \times 10^{-3}$$

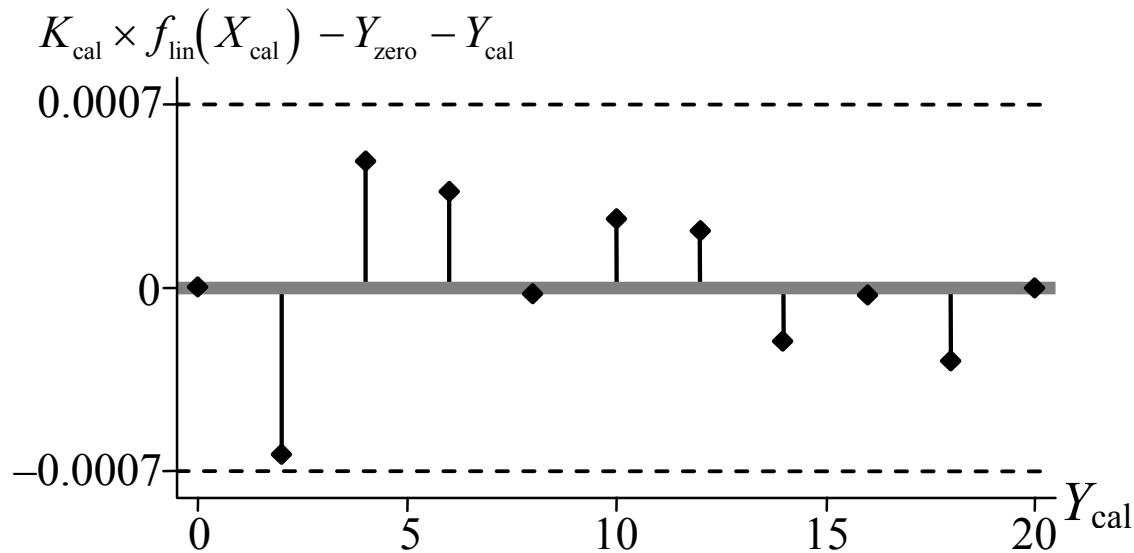
$$d = -5.753 \times 10^{-4}$$

Die Parameter der Funktion wurden aus den Kalibrierpunkten durch Regression bestimmt.

Die Unsicherheit der Parameter a , b , c und d hat keinen Einfluss auf die Messungen mit der Korrekturfunktion.

Es existieren (beliebig) viele Korrekturfunktionen, die die Linearität verbessern. Nachdem eine Funktion gewählt wurde, ist die Funktion vollständig bekannt.

Abweichung von der linearen Kennlinie



Residuen nach der Anwendung der Korrekturfunktion.

Die Korrekturfunktion hat die Abweichung von einer linearen Kennlinie deutlich reduziert.

Die Spezifikation für die Grenze der möglichen Abweichung von einer linearen Kennlinie kann auf $\varepsilon_{\text{lin}} = 0.0007$ reduziert werden.

$$\left| \delta_{\text{lin}}(Y)_i \right| < \varepsilon_{\text{lin}}$$

Messunsicherheitsbudgets mit Korrektur

Kalibrierfaktor

Größe	Wert	Standardmessunsicherheit	Sensitivitätskoeffizient	Unsicherheitsbeitrag	Beitragskoeffizient
$Y_{\text{cal},10}$	20.00000	2.3×10^{-3}	0.050	120×10^{-6}	97.1 %
$X_{\text{cal},10}$	2.041				
$X_{\text{cal},0}$	0.0				
$\delta X_{\text{res},10}$	0.0	29×10^{-6}	-0.49	-14×10^{-6}	1.5 %
$\delta X_{\text{res},0}$	0.0	29×10^{-6}	0.49	14×10^{-6}	1.5 %
K_{cal}	1.00001	120×10^{-6}			

Messung in der Mitte des Bereichs

Größe	Wert	Standardmessunsicherheit	Sensitivitätskoeffizient	Unsicherheitsbeitrag	Beitragskoeffizient
X_5	1.0201				
$\delta X_{\text{res},5}$	0.0	29×10^{-6}	9.8	280×10^{-6}	5.0 %
K_{cal}	1.00001	120×10^{-6}	10	1.2×10^{-3}	82.4 %
Y_{zero}	0.0	280×10^{-6}	-1.0	-280×10^{-6}	2.5 %
$\delta_{\text{lin}}(Y)_{,5}$	0.0	400×10^{-6}	-1.0	-400×10^{-6}	10.1 %
Y_5	10.0003	1.3×10^{-3}			

Messgenauigkeit des Messgerätes mit Korrektur

Größe	Wert	Erweiterte Unsicherheit	Erweiterungs- faktor
Y_0	0.0	990×10^{-6}	2.00
Y_1	1.9994	1.2×10^{-3}	2.00
Y_2	4.0005	1.4×10^{-3}	2.00
Y_3	6.0004	1.8×10^{-3}	2.00
Y_4	8.0000	2.1×10^{-3}	2.00
Y_5	10.0003	2.5×10^{-3}	2.00
Y_6	12.0002	3.0×10^{-3}	2.00
Y_7	13.9998	3.4×10^{-3}	2.00
Y_8	16.0000	3.8×10^{-3}	2.00
Y_9	17.9997	4.3×10^{-3}	2.00
Y_{10}	20.0000	4.7×10^{-3}	2.00

Ablesungen müssen mit $f_{\text{lin}}(X)$ korregiert werden.

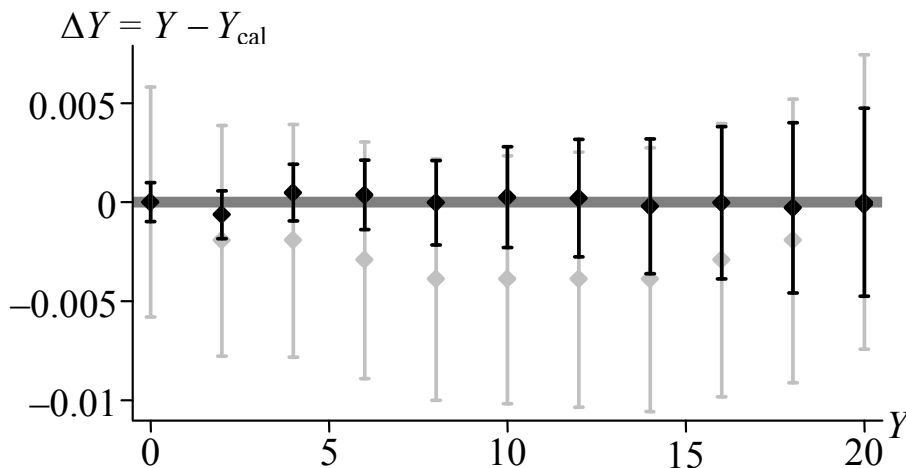
$$f_{\text{lin}}(X) = a + b \times X + c \times X^2 + d \times X^3$$

$$a = 0$$

$$b = 9.806$$

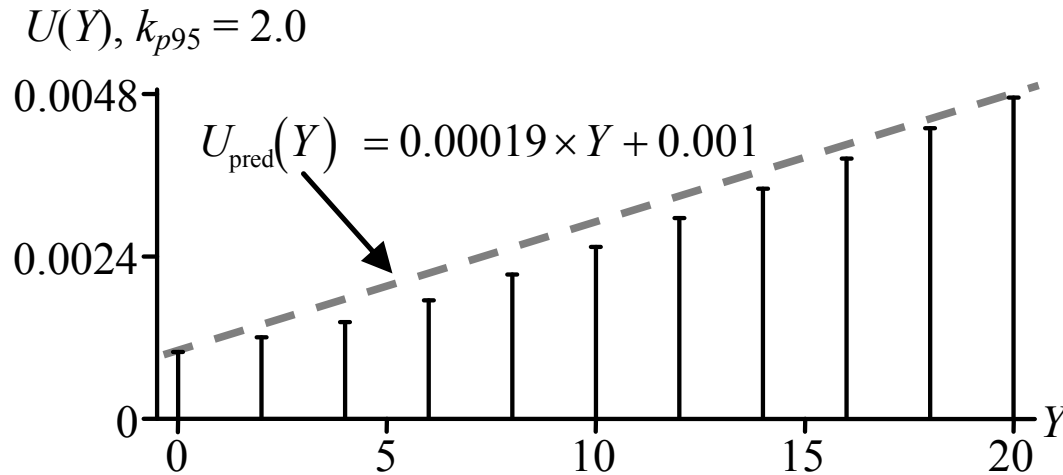
$$c = -2.251 \times 10^{-3}$$

$$d = -5.753 \times 10^{-4}$$



Eine Vorhersage der Messunsicherheit ist möglich, allerdings hängt die Messunsicherheit deutlich vom Messwert ab.

Entwicklung einer Spezifikation für die Vorhersage der Messunsicherheit



Anpassung einer einhüllenden Gerade an die berechneten Messunsicherheiten.

$$Y = 1.00001 \times \left(9.806 \times X - 2.251 \times 10^{-3} \times X^2 - 5.753 \times 10^{-4} \times X^3 \right)$$

$$U_{\text{pred}}(Y) = 0.00019 \times Y + 0.001 \quad (k_{p95} = 2.0)$$

Zusammenfassung

- Lineare Messprozesse sind die Voraussetzung für die Bereichskalibrierung
- Lineare Messprozesse lassen sich mit Hilfe von 2 Punkten kalibrieren
- Die Abweichung der Kennlinie von einer Geraden muss bestimmt werden. Dazu sind ggf. weitere Informationen (Messpunkte) notwendig.
- Mit Hilfe von nichtlinearen Korrekturfunktionen kann die Abweichung der Kennlinie von einer Geraden reduziert werden.
- Mit Hilfe der Daten aus der Bereichskalibrierung kann in vielen Fällen die Messunsicherheit vorhergesagt werden.