

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Berechnung der Messunsicherheit nach GUM

Kurzfassung in 20 min

Stephan Mieke
PTB-Institut Berlin

Begriffe

Messaufgabe

Model der Messung

Eingangsgrößen

MU der Eingangsgrößen

MU der Ausgangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des Ergebnisses

Gegenstand	Definition (verkürzt)	VIM (Wörterb. d. Metrologie)	Beispiele / Anmerkungen
Größe	Eigenschaft eines Phänomens, eines Körpers oder einer Substanz, ...	1.1	Länge, Spannung, Energie, Stoffmengenkonzentration
Größenwert	Zahlenwert und Referenz, die zusammen eine Größe quantitativ angeben	1.19	Masse eines Körpers: 0,152 kg ; Stoffmengenkonz. von L. in einer Plasmaprobe: 5,0 l E / L
Messwert	Größenwert, der ein Messergebnis repräsentiert	2.10	
Messergebnis	Menge von Größenwerten, die einer Messgröße zugewiesen sind, zusammen mit jeglicher verfügbarer relevanter Information	2.9	Ein Messergebnis wird im Allgemeinen als ein einziger Messwert und eine Messunsicherheit ausgedrückt.
Messunsicherheit	nichtnegativer Parameter $[u]$, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die der Messgröße auf der Grundlage der benutzten Information beigeordnet ist	2.26	
Überdeckungsintervall	Intervall $[2U]$, das die Menge der wahren Werte einer Messgröße mit einer angegebenen Wahrscheinlichkeit enthält, ...	2.36	

Deutsch-englische Fassung des ISO/IEC-Leitfaden 99

PDF: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (probability density function)

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Vorgehen:

- 1) Messaufgabe und Messgröße
- 2) Messprinzip
- 3) Messmethode
- 4) Messverfahren

Ergebnis:

- Identifikation der Messgröße
- bessere Kenntnis und Verständnis des Messverfahrens

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

1 Messaufgabe und Messgröße:

Bestimmung des Volumens V eines Bechers mit einem Nennwert von 2 L bei einer Temperatur von 20 C.

2 Messprinzip:

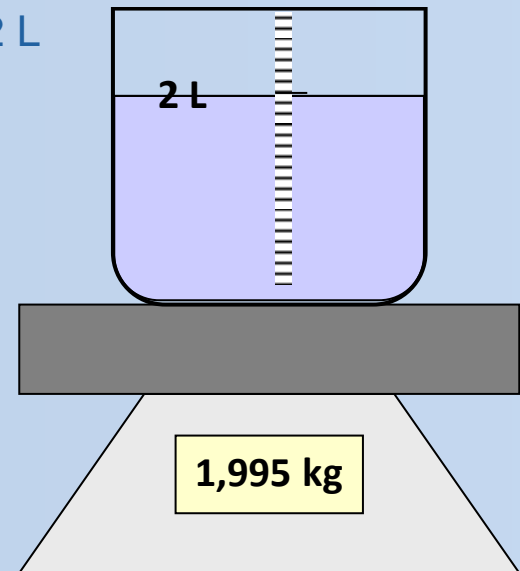
$\text{Volumen} = \text{Masse} / \text{Dichte}$

3 Messmethode:

Gravimetrische Kalibrierung

4 Messverfahren:

Wiederholtes Füllen des Bechers mit bidistilliertem Wasser und Wiegen der Masse m des enthaltenen Wassers



Begriffe

Messaufgabe

**Model der
Messung**

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Vorgehen:

- 1) Suchen der Größen, die die Messung beeinflussen könnten
- 2) Strukturieren und Bewerten der Eingangsgrößen X_i
- 3) Aufstellen des mathematischen Modells der Messung

Ergebnis:

- Mathematisches Modell der Messgröße: $Y = f(X_1, X_2, \dots X_N)$
(Y : Ausgangsgröße, X_i : Eingangsgrößen)

Begriffe

Messaufgabe

Model der Messung

Eingangsgrößen

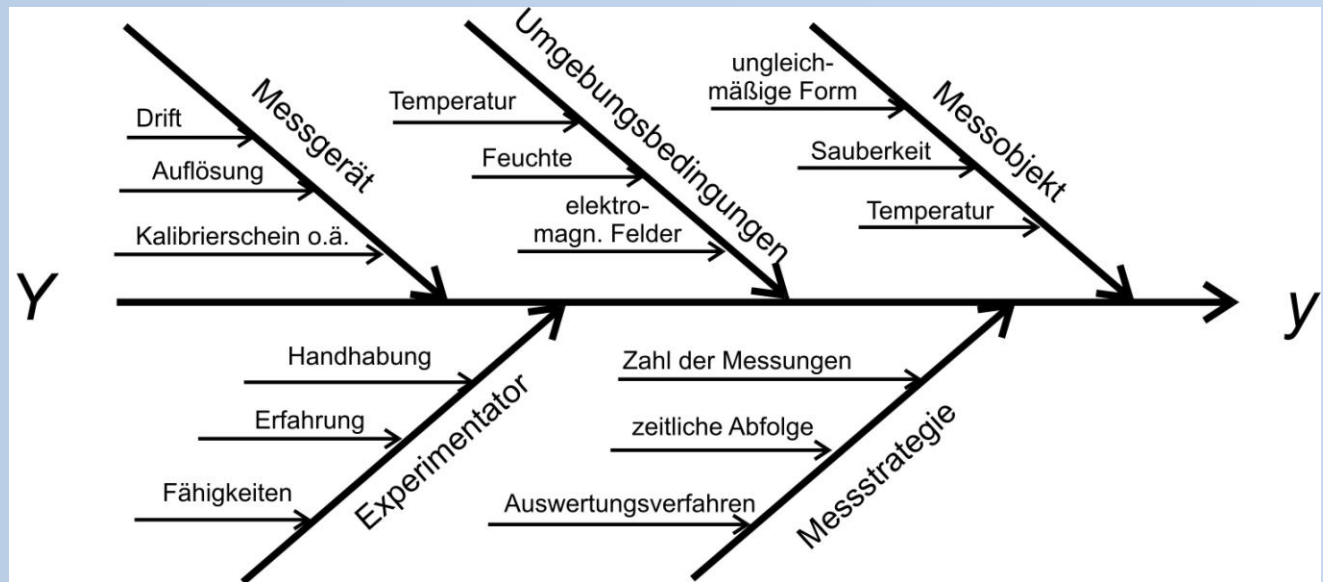
MU der Eingangsgrößen

MU der Ausgangsgröße

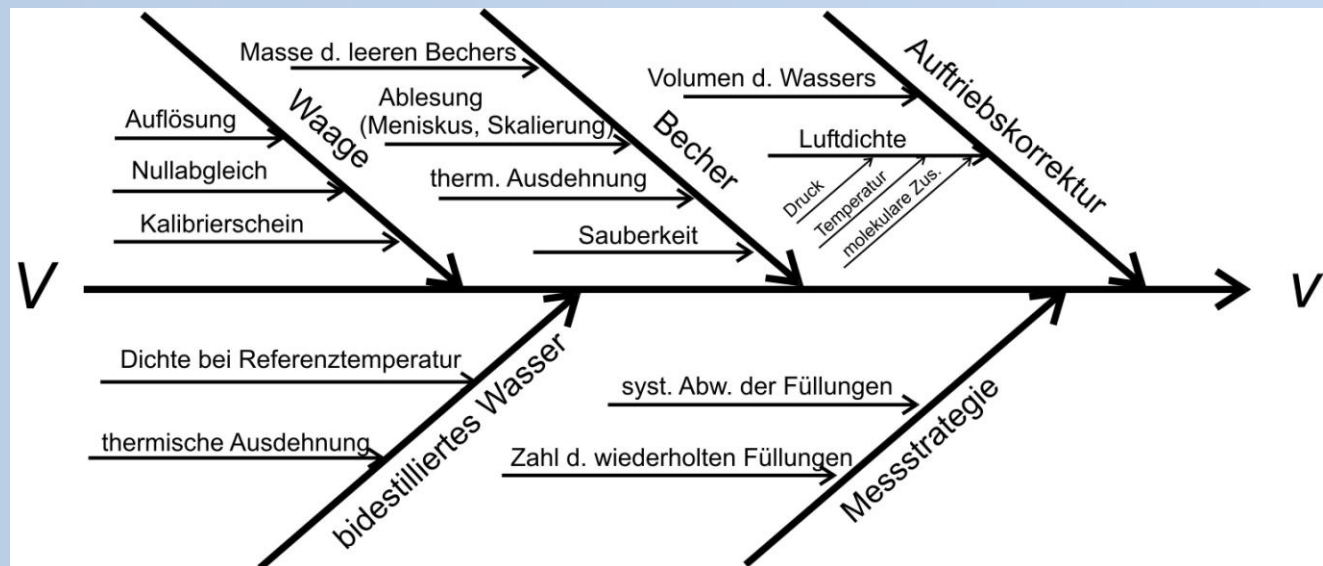
Erweiterte MU

Angabe des Ergebnisses

Ichikawa Diagramm (allgemein):



Ichikawa Diagramm (Beispiel: 2L-Becher):



Begriffe

Messaufgabe

**Model der
Messung**

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Beispiel einer Modellgleichung: Volumenmessung

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{W + B_{air}}{\rho} = \frac{\bar{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho}$$

mit

V Volumen des Bechers

m Masse des eingefüllten Wassers

W Netto-Messwert (vermindert um die Masse des leeren Bechers)

ΔW_{Cal} Messabweichung der Waage (Kalibrierschein-Angabe)

ΔW_{res} Auflösung der Waage

B_{air} Korrektur des Luftauftriebs

ρ Dichte des Wassers

Hinweis:

Diese Gleichung verletzt die Linearitätsforderung des (Standard-)GUM. Praktisch ist das, bei hinreichend kleinen Messunsicherheiten der Eingangsgrößen, ohne Bedeutung. Bei größeren Messunsicherheiten müsste die Berechnung mittels Monte-Carlo-Simulation per Software durchgeführt werden.

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

**Eingangs-
größen**

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Vorgehen:

Bestimmung der Messunsicherheiten $u(x_i)$
aller relevanten Eingangsgrößen X_i

➤ durch Messung

oder

➤ aus anderen Informationsquellen

Ergebnis:

Angaben zu jeder Eingangsgröße X_i

- bester Schätzwert x_i

- Informationen zu dessen Messunsicherheit $u(x_i)$

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

**Eingangs-
größen**

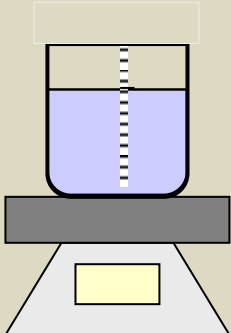
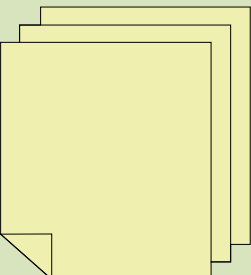
MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Der beste Schätzwerte x_i einer Eingangsgröße X_i und dessen bei-geordnete Standardunsicherheit $u(x_i)$ kann auf zwei verschiedenen Wegen ermittelt werden:

Typ A	Typ B
<p data-bbox="556 635 1000 721">wiederholte Messungen bei gleichen Messbedingungen</p> 	<p data-bbox="1193 635 1748 721">Angaben aus anderen Informations- quellen</p> <ul data-bbox="1217 749 1555 1006" style="list-style-type: none">• Kalibrier- / Eichschein• Gerätespezifikation• Literatur• vorherige Messungen• usw 

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

**Eingangs-
größen**

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Typ A: wiederholte Messungen

- bester Schätzwert: arithmetischer Mittelwert (GUM 4.2.1)

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k$$

- Standardunsicherheit: Standardabweichung des Mittelwerts (GUM 4.2.3)

$$u(\bar{q}) = s(\bar{q}) = \frac{s(q_k)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}$$

empirische Standardabweichung

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

**Eingangs-
größen**

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Typ B: Angaben aus anderen Informationsquellen

- Eichschein: ... die Eichfehlergrenzen werden eingehalten ...
- Kalibrierschein: ... der Wert der Messgröße beträgt $19,98 \text{ } ^\circ\text{C}$...
... die erweiterte Messunsicherheit beträgt $0,10 \text{ } ^\circ\text{C}$...
... es wurden 5 Vergleichsmessungen durchgeführt ...
- Herstellerangabe: ... Genauigkeit: 1% der Anzeige + 2 Digits

Begriffe

Messaufgabe

Model der Messung

Eingangsgrößen

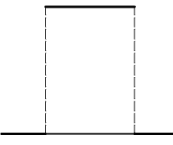
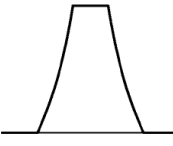
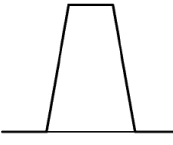
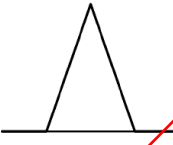
MU der Eingangsgroßen

MU der Ausgangsgröße

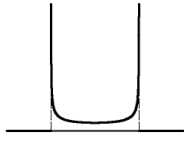
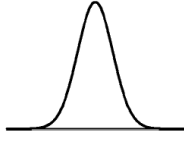
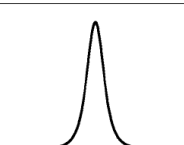

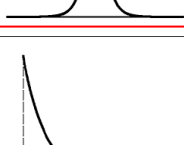
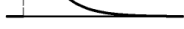
Erweiterte MU

Angabe des Ergebnisses

Tabelle 1 — Vorhandene Information und die auf der Grundlage dieser Information zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

verfügbare Information	zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Veranschaulichung (nicht maßstäblich)	Unterabschnitt
untere und obere Grenzen a, b	Rechteckverteilung: $R(a, b)$ 	6.4.2
ungenauere untere und obere Grenzen $a \pm d, b \pm d$	kurvenförmige Trapezverteilung: $CTrap(a, b, d)$ 	6.4.3
Summe zweier Größen mit zugeordneten Rechteckverteilungen mit unteren und oberen Grenzen a_1, b_1 und a_2, b_2	Trapezverteilung: $Trap(a, b, \beta)$ mit $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2, \beta = ((b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)) / (b - a)$ 	
Summe zweier Größen mit zugeordneten Rechteckverteilungen mit unteren und oberen Grenzen a_1, b_1 und a_2, b_2 und der gleichen halben Breite $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$	Dreiecksverteilung: $T(a, b)$ mit $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ 	

geeichtes Gerät

verfügbare Information	zugeordnete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Veranschaulichung (nicht maßstäblich)	Unterabschnitt
sinusförmige periodische Schwingung zwischen unterer und oberer Grenze a, b	Arccosinus-Verteilung (U-förmig): $U(a, b)$ 	6.4.6
bester Schätzwert x und beigeordnete Standardunsicherheit $u(x)$	Gauß-Verteilung: $N(x, u^2(x))$ 	6.4.7
bester Schätzwert x einer Vektorgroße und beigeordnete Unsicherheitsmatrix $U(x)$	multivariate Gauß-Verteilung: $N(x, U_x)$ 	6.4.8
Folge von Anzeigewerten x_1, \dots, x_N , welche unabhängig voneinander als Stichprobe einer Größe, die eine Gauß-Verteilung besitzt, genommen worden sind, mit unbekanntem Erwartungswert und unbekannter Varianz	Skalierte und verschobene t -Verteilung: $t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n)$ mit $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n, s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)$ 	6.4.9.2
bester Schätzwert x , erweiterte Unsicherheit U_p , Erweiterungsfaktor k_p und Anzahl der effektiven Freiheitsgrade ν_{eff}	skalierte und verschobene t -Verteilung: $t_{\nu_{\text{eff}}}(\bar{x}, (U_p/k_p)^2)$ 	6.4.9.7
bester Schätzwert x einer nicht negativen Größe	Exponentialverteilung: $Ex(1/x)$ 	6.4.10

Gerät mit Kalibrierschein

Gerät mit Kalibrierschein und zusätzlichen Informationen

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

**MU der Ein-
gangsgrößen**

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Vorgehen:

- 1) Typ A :
Standardunsicherheit bereits als Standardabweichung des Mittelwerts bekannt.
- 2) Typ B:
Berechnung der Standardunsicherheiten (d.h.: Standardabweichungen) aller Eingangsgrößen aus deren angenommenen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen nach festen Regeln.

Ergebnis:

Standardunsicherheiten (bzw. Standardabweichungen) aller Eingangsgrößen

Begriffe

Messaufgabe

Model der Messung

Eingangsgrößen

MU der Eingangsgrößen

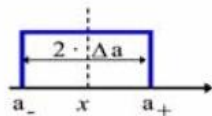
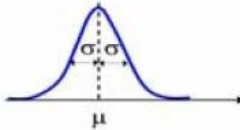
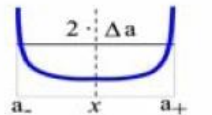
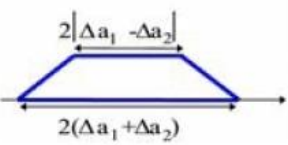
MU der Ausgangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des Ergebnisses

Einschätzen der beteiligten Größen

Methode B: Zusammenfassung

Kenntnisse über die Größe	Resultierende PDF	Standardabweichung	
Mögliche Werte sind in einem Intervall enthalten	 <p>gleichverteilt</p>	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{3}}$	
Erwartungswert μ und Standardabweichung σ	 <p>gaußförmig</p>	$u_x = \sigma$	
Größe ist Funktion $X = \Delta a \cdot \sin\Phi$ Phasenwinkel Φ unbekannt	 <p>U-förmig</p>	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{2}}$	
Größe ist Summe/ Differenz zweier Größen X_1, X_2 ; Kenntnisse entspr. rechteckförmigen PDF	 <p>trapezförmig</p>	$u_x = \frac{\Delta a}{\sqrt{6}} \sqrt{1 + \beta^2}$	

© PTB DIN Arbeitskreis Umsetzung des GUM 2000/2004

Ermittlung der kombinierten Standardunsicherheit (GUM 5)

Die kombinierte Standardunsicherheit eines Messergebnisses (einer Ausgangsgröße) u_c wird aus den Standardunsicherheiten durch Fehlerfortpflanzung berechnet.

Dabei sind 2 Fälle zu unterscheiden:

- unkorrelierte [Unsicherheiten der] Eingangsgrößen (GUM 5.1)

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i \cdot u(x_i)} \quad \text{mit} \quad c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{folgt} \quad u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i)$$

und

- korrelierte [Unsicherheiten der] Eingangsgrößen (GUM 5.2)

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}_{\text{unkorrelierter Fall}} + \underbrace{2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}_{\text{Mischterme mit Kovarianzen}}$$

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

**MU der Aus-
gangsgröße**

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

**MU der Aus-
gangsgröße**

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Hinweis zu korrelierten Eingangsgrößen

Gemeint ist hier die Korrelation der Zufallsgrößen **nicht** die der physikalischen Größen (GUM 5.2.1). Wenn die Messunsicherheit der einen Eingangsgröße mit der Messunsicherheit einer anderen Eingangsgröße in gleicher- oder gegenläufiger Weise schwankt, kann das daran liegen, dass für verschiedene Eingangsgrößen

- dasselbe Messgerät,
- dasselbe Normal,
- derselbe Referenzwert,
- dieselbe Energiequelle,
- ...

benutzt wird.

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

**MU der Aus-
gangsgröße**

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Beispiel: Volumenmessung (unkorrelierter Fall)

Modellgleichung:

$$V = \frac{\bar{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho}$$

kombinierte Standardunsicherheit:

$$u_c^2(V) = (c_{\bar{W}} \cdot u(\bar{W}))^2 + (c_{\Delta W_{cal}} \cdot u(\Delta W_{cal}))^2 \\ + (c_{\Delta W_{res}} \cdot u(\Delta W_{res}))^2 + (c_{B_{air}} \cdot u(B_{air}))^2 + (c_{\rho} \cdot u(\rho))^2$$

Empfindlichkeitskoeffizienten c_i :

$$c_{\bar{W}} = \frac{\partial V}{\partial \bar{W}} = \frac{1}{\rho} \quad c_{\Delta W_{cal}} = \frac{\partial V}{\partial \Delta W_{cal}} = \frac{1}{\rho} \quad c_{\Delta W_{res}} = \frac{\partial V}{\partial \Delta W_{res}} = \frac{1}{\rho}$$

$$c_{B_{air}} = \frac{\partial V}{\partial B_{air}} = \frac{1}{\rho} \quad c_{\rho} = \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{\bar{W} + \Delta W_{cal} + \Delta W_{res} + B_{air}}{\rho^2}$$

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

**Erweiterte
MU**

Angabe des
Ergebnisses

Die erweiterte Messunsicherheit U gibt einen Bereich um das Messergebnis an, von dem erwartet werden kann, dass er einen großen Anteil der Verteilung der Werte umfasst, die der Messgröße Y sinnvollerweise zugeordnet werden können.

Man erhält sie durch Multiplikation der kombinierten Standardmessunsicherheit $u_c(y)$ mit dem Erweiterungsfaktor k :

$$U = k \cdot u_c(y)$$

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

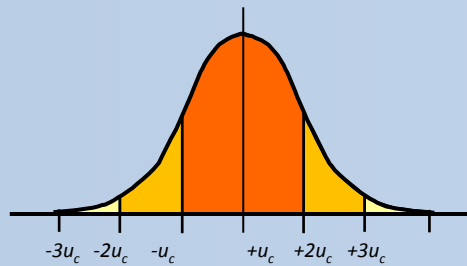
MU der Aus-
gangsgröße

**Erweiterte
MU**

Angabe des
Ergebnisses

Wert des Erweiterungsfaktor bei

Normalverteilung:



Rechteckverteilung:

Table G.1 — Value of the coverage factor k_p that produces an interval having level of confidence p assuming a normal distribution

Level of confidence p (percent)	Coverage factor k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

Grad des Vertrauens p (in %)	Erweiterungsfaktor k_p
57,74	1
95	1,65
99	1,71
100	1,73

Erweiterungsfaktor normalverteilter Werte in Abhängigkeit von der Zahl der Messungen (Freiheitsgrade)

Begriffe

Messaufgabe

Model der Messung

Eingangsgrößen

MU der Eingangsgroßen

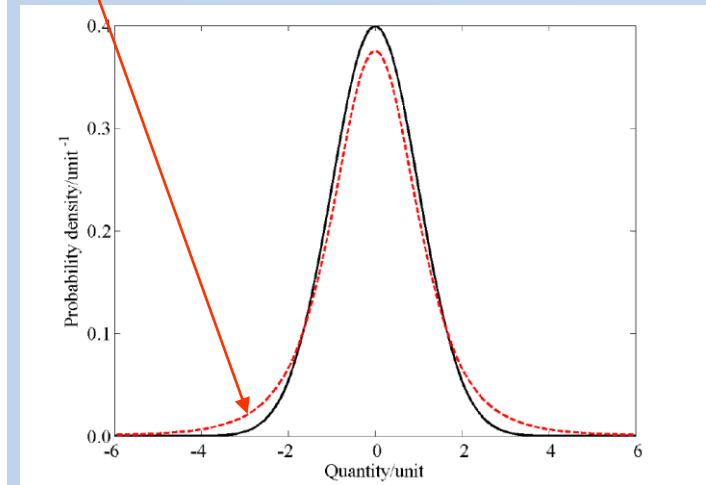
MU der Ausgangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des Ergebnisses

Table G.2 — Value of $t_p(\nu)$ from the t -distribution for degrees of freedom ν that defines an interval $-t_p(\nu)$ to $+t_p(\nu)$ that encompasses the fraction p of the distribution

Degrees of freedom ν	Fraction p in percent					
	68,27 ^{a)}	90	95	95,45 ^{a)}	99	99,73 ^{a)}
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	236,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000



a) For a quantity z described by a normal distribution with expectation μ_z and standard deviation σ , the interval $\mu_z \pm k\sigma$ encompasses $p = 68,27$ percent, $95,45$ percent and $99,73$ percent of the distribution for $k = 1, 2$ and 3 , respectively.

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

**Angabe des
Ergebnisses**

GUM 7.2.3

Bei der Angabe eines Messergebnisses sollte man, wenn die erweiterte Unsicherheit $U = k \cdot u_c(y)$ das Maß für die Unsicherheit ist:

- a) vollständig beschreiben, wie die **Messgröße Y** definiert ist;
- b) das Messergebnis in der Form **$Y = y \pm U$** angeben;
- c) die **relative erweiterte Unsicherheit $U / |y|$** angeben und wenn $|y| \neq 0$;
- d) den zur Ermittlung von U verwendeten **Wert von k** angeben (oder zur Erleichterung für den Nutzer des Messergebnisses sowohl k als auch $u_c(y)$);
- e) den annähernden **Grad des Vertrauens** angeben, der dem Bereich $y \pm U$ zugeordnet ist, sowie die Methode seiner Ermittlung;
- f) die in GUM 7.2.7 skizzierte Information angeben oder auf eine Publikation verweisen, die diese Information enthält.

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

**Angabe des
Ergebnisses**

QM-VA 25 Messunsicherheitsangaben in ... Ergebnisberichten aus der PTB

In Kalibrierscheinen und in Prüfberichten ... ist bei der Angabe der Messunsicherheit **im Falle der Normalverteilung** folgende Formulierung zu verwenden:

„Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor $k=2$ ergibt. Sie wurde gemäß dem „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)“ ermittelt. Der Wert der Messgröße liegt dann im Regelfall mit einer Wahrscheinlichkeit von annähernd 95 % im zugeordneten Überdeckungsintervall.“

Englische Übersetzung:

„The uncertainty stated is the expanded measurement uncertainty obtained by multiplying the standard measurement uncertainty by the coverage factor $k = 2$. It has been determined in accordance with the “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)”. The value of the measurand then normally lies, with a probability of 95 %, within the attributed coverage interval.“

Liegt eine andere Verteilung vor, so ist ein anderer Erweiterungsfaktor zu benutzen. Die o.g. Formulierung ist entsprechend anzupassen.

Begriffe

Messaufgabe

Model der
Messung

Eingangs-
größen

MU der Ein-
gangsgrößen

MU der Aus-
gangsgröße

Erweiterte MU

Angabe des
Ergebnisses

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit