Messunsicherheitsbestimmung nach GUM S2:

„Beliebige Zahl von Ausgangsgrößen“

Gerd Wübbeler

Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB), Berlin

Überblick

- **Messunsicherheitsbestimmung nach GUM**

- **GUM Supplement 2: „Beliebige Zahl von Ausgangsgrößen“**
  - **GUM S2 Matrix-Verfahren**
  - **Monte-Carlo Verfahren**
  - **Überdeckungsregion**

- **Zusammenfassung**

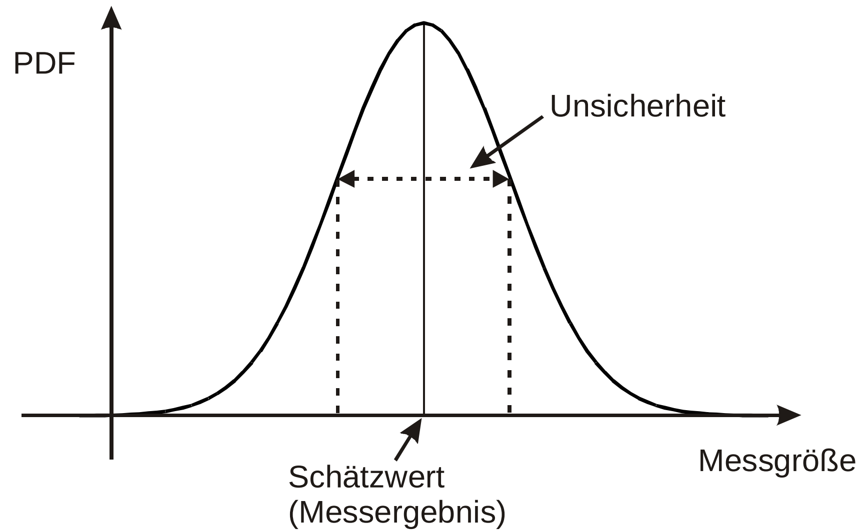
Bayessche Datenanalyse

Messdaten

Modell

weitere Information

Wahrscheinlichkeitsdichte PDF



➢ **Quantitative Beschreibung der Kenntnis über die Messgröße via PDF**

Messunsicherheitsbestimmung nach GUM

Schätzwerte Unsicherheiten | **Modell** | **Schätzwert Unsicherheit**

$x_1,\ u(x_1)$ ➡

$x_2,\ u(x_2)$ ➡

$x_3,\ u(x_3)$ ➡

$$Y = f(X_1, X_2, X_3)$$

➡

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(x_1, \ldots, x_N) \\ u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + \cdots \\ U = k\,u(y) \end{array} \right.$$

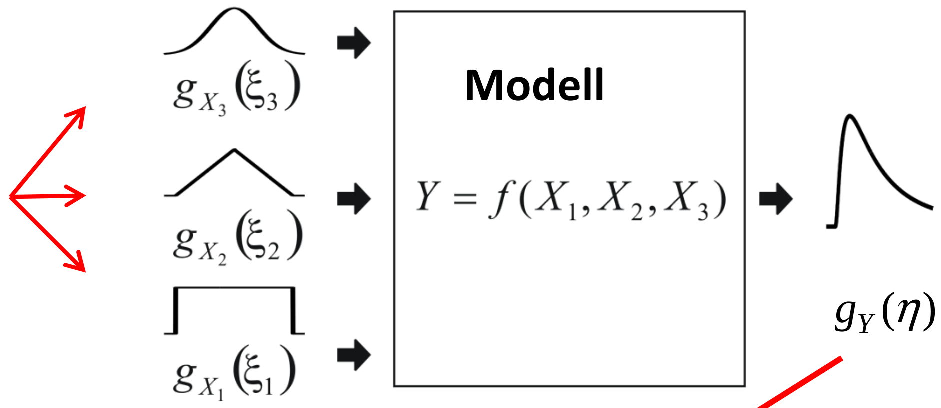
Voraussetzung für Anwendbarkeit des GUM

- „Linearität“ des Modells
- Annahmen über Verteilungen

} nicht erfüllt ➡ **GUM S1**

GUM S1: Fortpflanzung von Verteilungen

PDFs der Eingangsgrößen



PDF der Messgröße

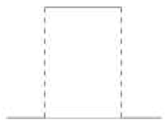
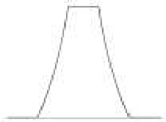
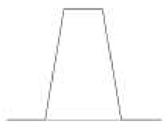
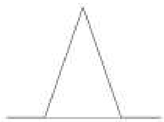
$$g_Y(\eta) = \int g_{\mathbf{X}}(\xi)\,\delta[\eta - f(\xi)]\,\mathrm{d}\xi$$

Lineare Näherung der Modell-Funktion

$$f(\xi) \approx f(\mathbf{x}) + (\xi - \mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\nabla f(\mathbf{x}))$$ ⇒ **GUM-Formeln**

Festlegung von Verteilungen

Table 1 — Available information and the PDF assigned on the basis of that information (6.4.1, C.1.2)

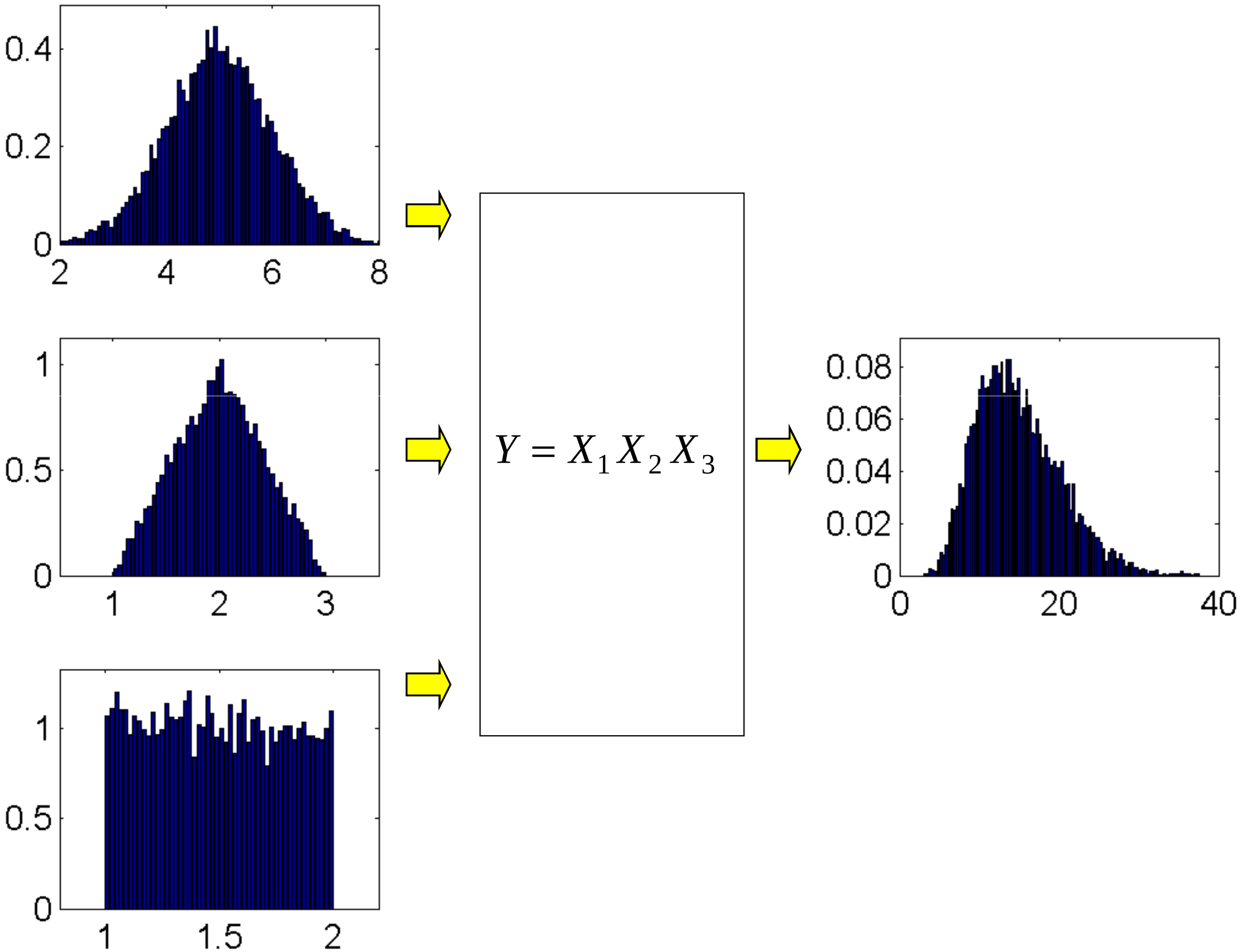
Available information	Assigned PDF and illustration (not to scale)		Subclause
Lower and upper limits a, b	Rectangular: $\mathrm{R}(a, b)$		6.4.2
Inexact lower and upper limits $a \pm d$, $b \pm d$	Curvilinear trapezoid: $\mathrm{CTrap}(a, b, d)$		6.4.3
Sum of two quantities assigned rectangular distributions with lower and upper limits a_1, b_1 and a_2, b_2	Trapezoidal: $\mathrm{Trap}(a, b, \beta)$ with $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $\beta = \lvert(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)\rvert/(b - a)$		6.4.4
Sum of two quantities assigned rectangular distributions with lower and upper limits a_1, b_1 and a_2, b_2 and the same semi-width ($b_1 - a_1 = b_2 - a_2$)	Triangular: $\mathrm{T}(a, b)$ with $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$		6.4.5

⋮

GUM Supplement 1 (2008)

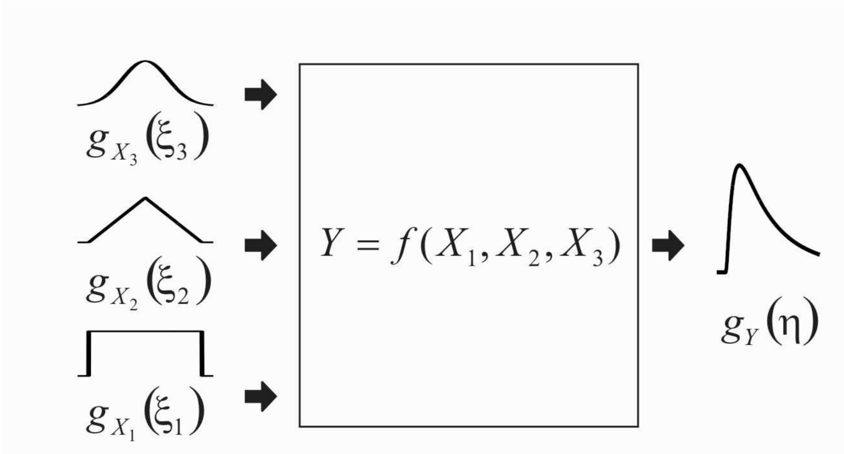
GUM S1: Monte-Carlo Methode

M=10000

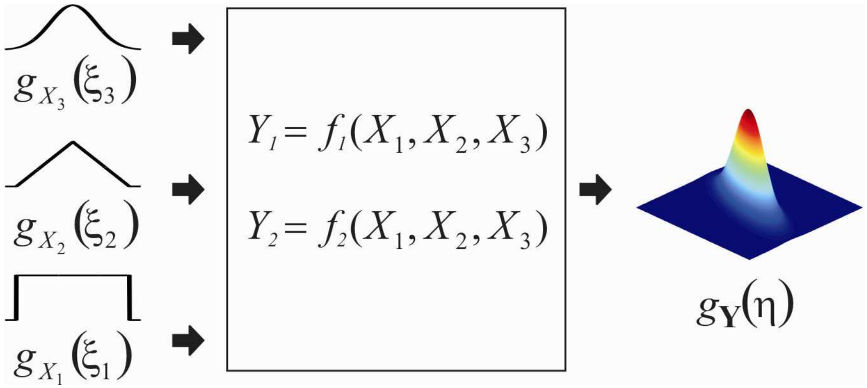


GUM S2: „Beliebige Zahl von Ausgangsgrößen“

GUM, GUM S1



GUM Supplement 2

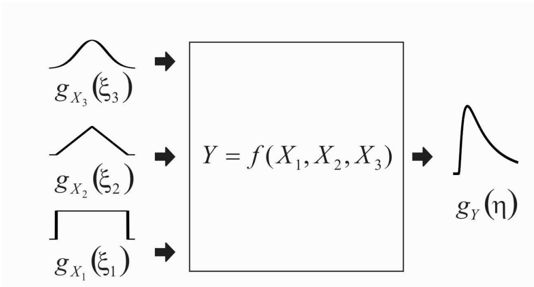


Veröffentlicht 2011: „http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html“

GUM Supplement 2

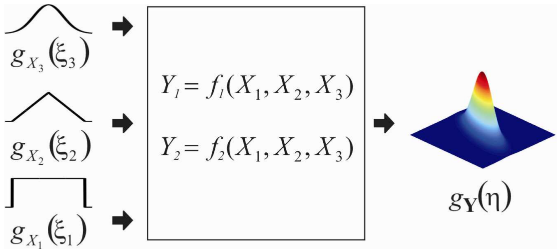
GUM, GUM S1

- Mehrere Eingangsgrößen (inkl. Korrelation)
- Skalare Messgröße



Neu im GUM S2: Mehrere Ausgangsgrößen bzw. Messgrößen

- Mehrere Geometrieparameter eines Objekts
- Komplexwertige Messgrößen
- Regression mehrerer Modellparameter
- Spektren, Zeitreihen
- …

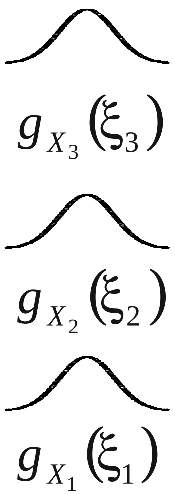


GUM S2: Korrelation

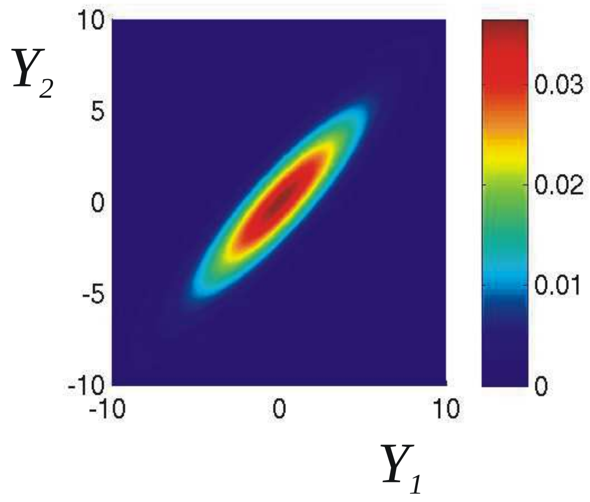
Information über Eingangsgrößen fließt gleichzeitig in Berechnung aller Ausgangsgrößen ein

⇨ **Korrelation der Ausgangsgrößen**

$g_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta})$ **: 2-dimensionale PDF**



$$Y_1 = X_1 + X_3$$
$$Y_2 = X_2 + X_3$$



Modell mit mehreren Ausgangsgrößen

N **Eingangsgrößen** $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)^T$

Modell mit
m **Ausgangsgrößen**

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)^T = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \\ &Y_1 = f_1(\mathbf{X}) \\ &\vdots \\ &Y_m = f_m(\mathbf{X}) \end{aligned}}$$

Unsicherheitsmatrix, Kovarianzmatrix

Eingangsgrößen

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)^T$$

$$\mathbf{U_x} = \begin{bmatrix} u(x_1,x_1) & \cdots & u(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N,x_1) & \cdots & u(x_N,x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2(x_1) & \cdots & u(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N,x_1) & \cdots & u^2(x_N) \end{bmatrix}$$

Darstellung mittels Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R_x} = \begin{bmatrix} r(x_1,x_1) & \cdots & r(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r(x_N,x_1) & \cdots & r(x_N,x_N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U_x} = \mathbf{D_x R_x D_x}$$

mit

$$\mathbf{D_x} = \begin{bmatrix} u(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u(x_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & u(x_N) \end{bmatrix}$$

GUM S2 Matrix-Verfahren

Modell $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)^T = \mathbf{f}(\mathbf{X})$

Schätzwerte der Eingangsgrößen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)^T$

Unsicherheitsmatrix der Eingangsgrößen $\mathbf{U_x}$

Schätzwert der Ausgangsgrößen, Messergebnis $\mathbf{y} = \mathbf{f(x)} = (y_1, \ldots, y_m)^T$

Unsicherheitsmatrix der Ausgangsgrößen $\mathbf{U_y} = \mathbf{C_x U_x C_x^T}$

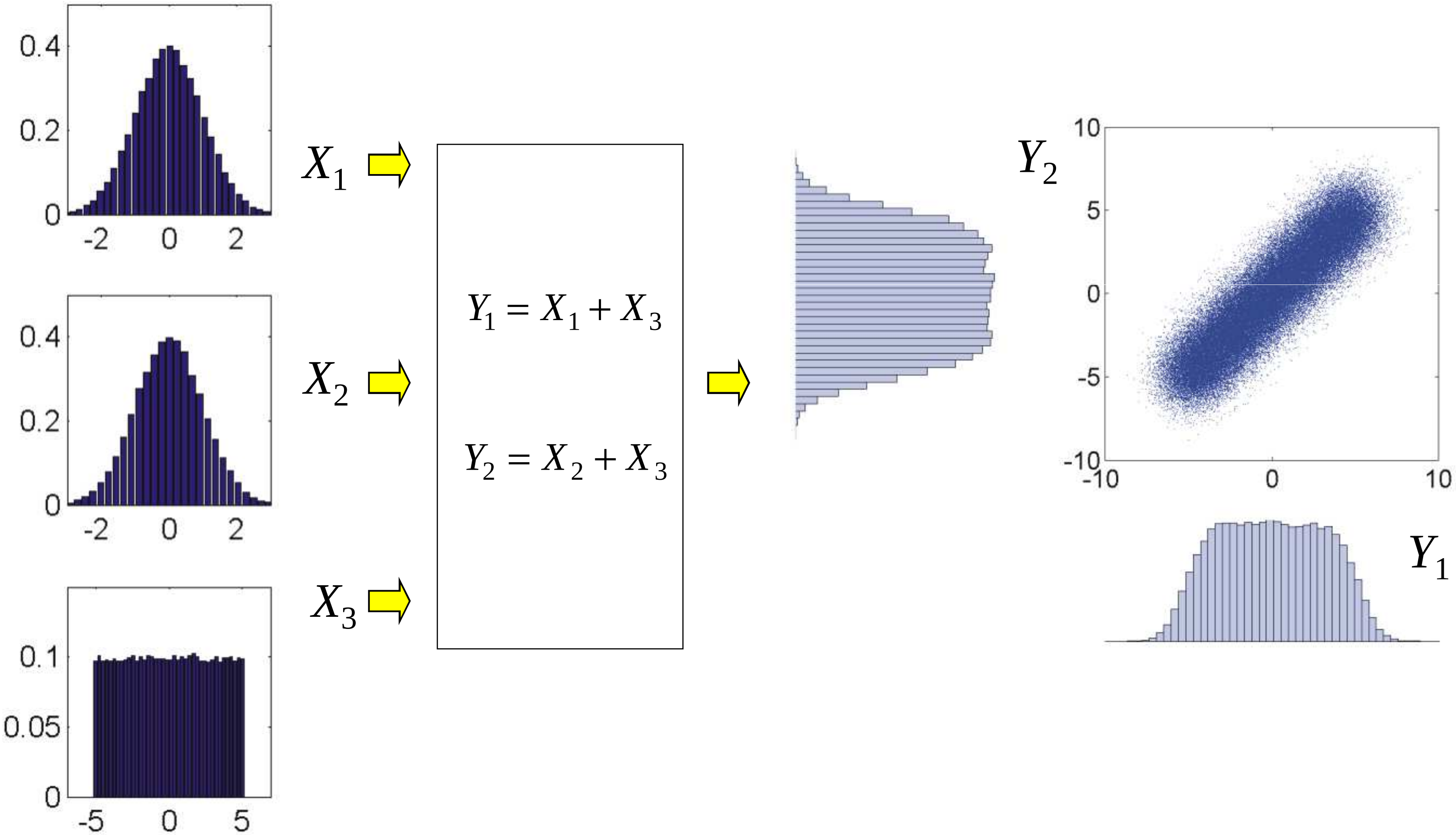
Sensitivitätsmatrix

$$\mathbf{C_x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_N} \end{bmatrix}$$

Linearisierung via Taylorentwicklung

GUM S2: Monte-Carlo Methode

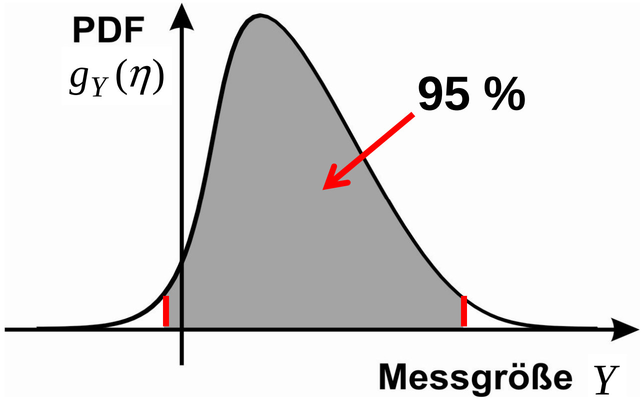
M=100000



Überdeckungsregion

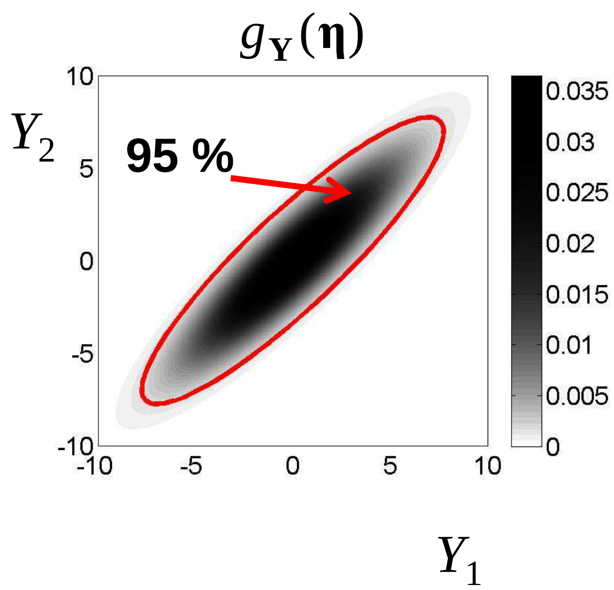
GUM, GUM S1: Skalare Messgröße

Erweiterte Messunsicherheit bzw.
Überdeckungsintervall



GUM S2: Mehrere Messgrößen

Überdeckungsregion: Fläche, Volumen



Varianten für Überdeckungsregion

GUM S2 Matrix-Verfahren

- Annahme einer multivariaten Gaussverteilung
- Korrelation berücksichtig → Hyperellipsoid
- Korrelation nicht berücksichtigt → Hyperrechteck

GUM S2 Monte-Carlo Methode

- Annahme einer multivariaten Gaussverteilung
- Korrelation berücksichtigt → Hyperellipsoid
- Korrelation nicht berücksichtigt → Hyperrechteck

- Hyperellipsoid bzw. Hyperrechteck skaliert : „genau“ 95% Überdeckung

- Kleinste Region(en) mit „genau“ 95 % Überdeckung

Beispiel

Modell	Schätzwerte	Unsicherheiten	Verteilung
$Y_1 = X_1 + X_3$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$	$u(x_1) = u(x_2) = 1$	Normal
$Y_2 = X_2 + X_3$		$u(x_3) = 3$	Rechteck

GUM S2 Matrix-Methode

Schätzwerte

$$y_1 = 0$$
$$y_2 = 0$$

$$\mathbf{U_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

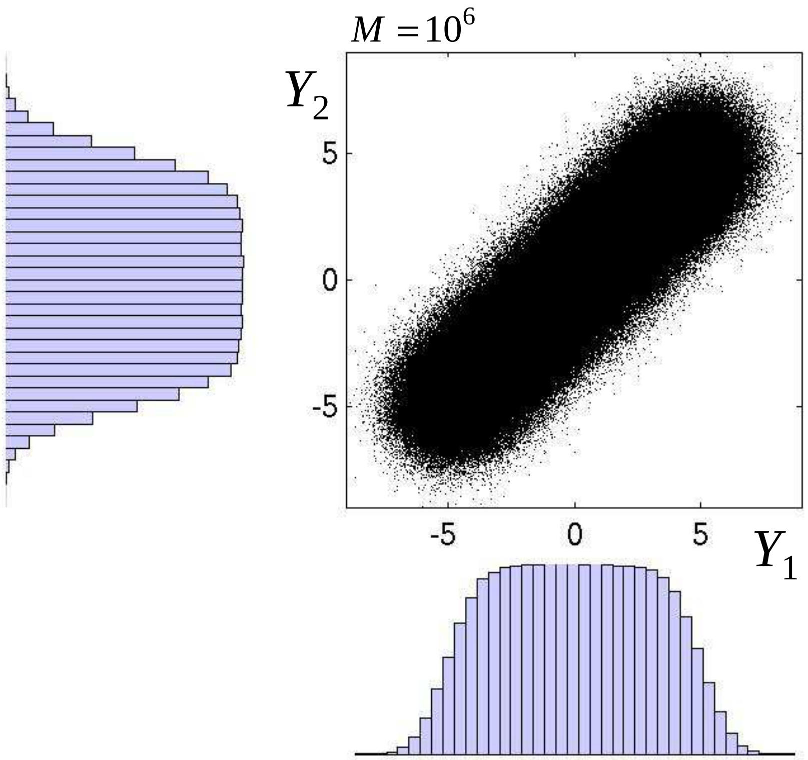
$$\mathbf{C_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Unsicherheitsmatrix

$$\mathbf{U_y} = \mathbf{C_x U_x C_x}^T = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Monte-Carlo Methode

Modell	Schätzwerte	Unsicherheiten	Verteilung
$Y_1 = X_1 + X_3$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$	$u(x_1) = u(x_2) = 1$	Normal
$Y_2 = X_2 + X_3$		$u(x_3) = 3$	Rechteck



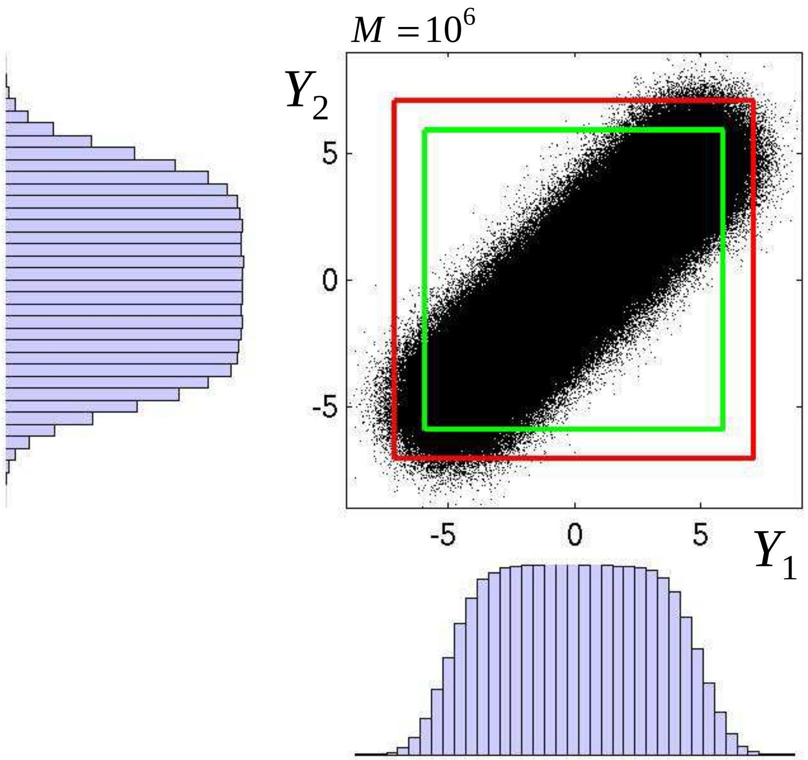
$$y_1 = -0.003$$

$$y_2 = -0.004$$

$$\mathbf{U_y} = \begin{bmatrix} 9.996 & 8.990 \\ 8.990 & 9.987 \end{bmatrix}$$

Überdeckungsregion: Hyperrechteck

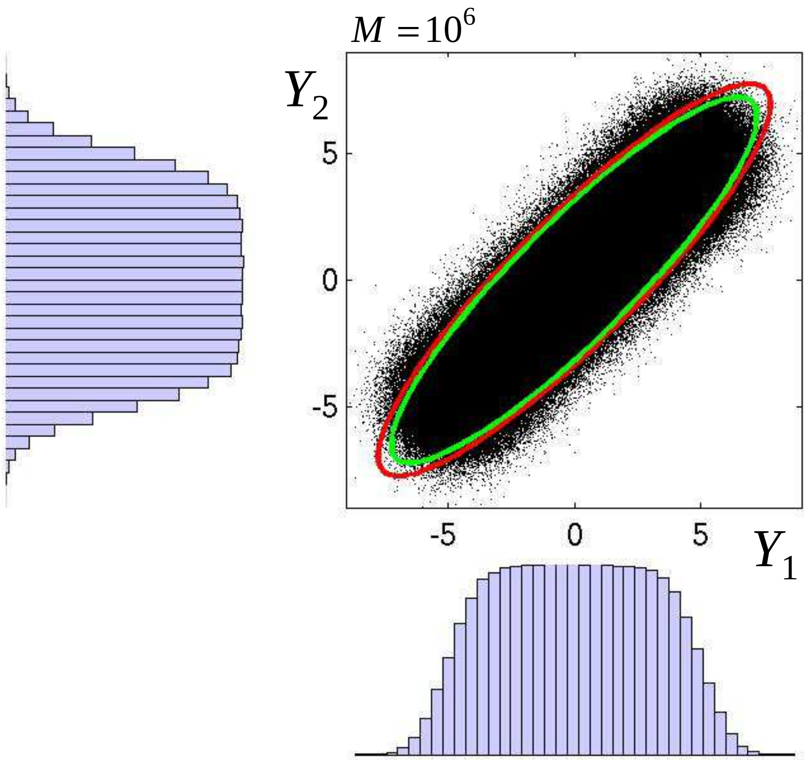
Modell	Schätzwerte	Unsicherheiten	Verteilung
$Y_1 = X_1 + X_3$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$	$u(x_1) = u(x_2) = 1$	Normal
$Y_2 = X_2 + X_3$		$u(x_3) = 3$	Rechteck



	Überdeckung	Fläche
Unskaliert	99.6 %	201.0
Skaliert	95.0 %	139.9

Überdeckungsregion: Hyperellipsoid

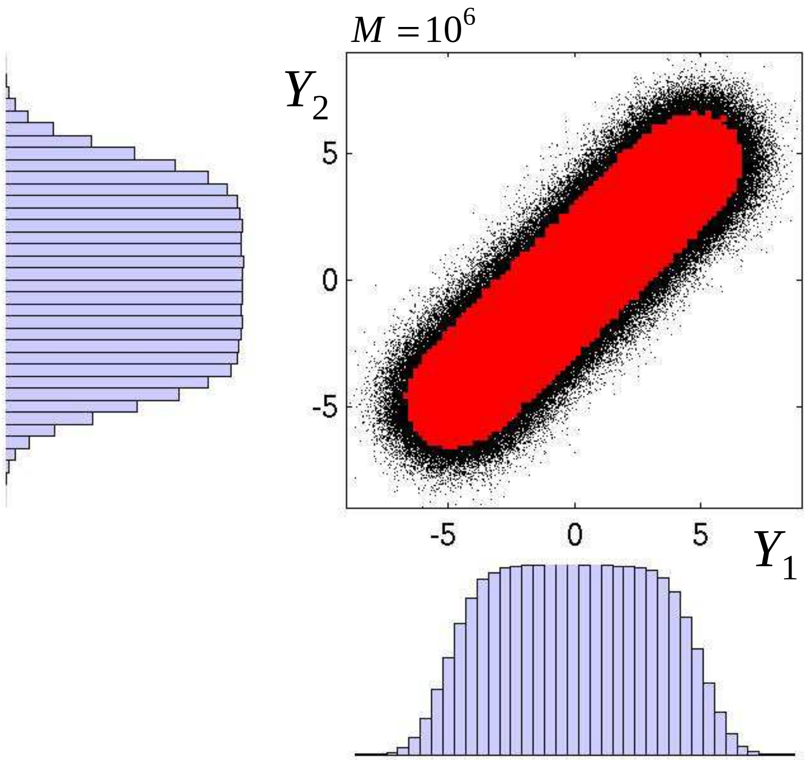
Modell	Schätzwerte	Unsicherheiten	Verteilung
$Y_1 = X_1 + X_3$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$	$u(x_1) = u(x_2) = 1$	Normal
$Y_2 = X_2 + X_3$		$u(x_3) = 3$	Rechteck



	Überdeckung	Fläche
Unskaliert	96.9 %	82.0
Skaliert	95.0 %	71.3

Beispiel: Kleinste Region

Modell	Schätzwerte	Unsicherheiten	Verteilung
$Y_1 = X_1 + X_3$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$	$u(x_1) = u(x_2) = 1$	Normal
$Y_2 = X_2 + X_3$		$u(x_3) = 3$	Rechteck



Überdeckung	Fläche
94.9 %	67.5

Zusammenfassung

- GUM, GUM S1 für skalare Messgrößen anwendbar
- GUM als Spezialfall in GUM S1 enthalten (Linearisierung)

- GUM S2 erweitert das GUM-Konzept auf mehrdimensionale Messgrößen
  - GUM S2 Matrix-Verfahren (analog zum GUM)
  - GUM S2 Monte-Carlo Methode (analog zu GUM S1)
  - Mehrere Varianten für Überdeckungsregion