



# Vereinfachte Modelle

Messunsicherheit fürs Labor

## Messunsicherheit

vollständige Lösungen (Schreibtisch)

- **GUM =**

ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement

- **DAkkS / DKD-3 oder DIN EN 13005**

Leitfaden zur Angabe der Messunsicherheit in Kalibrierscheinen

- **DKD 2622 – Blatt 2**

Methoden zur Ermittlung der Messunsicherheit

## Messunsicherheit vom Schreibtisch ins Labor

**Was ist Mess(ver)unsicherheit? Mess(un)genauigkeit (Sprachgebrauch)?**

**Intervall, in dem ein Messwert tatsächlich dem angegebenen Wert entspricht**

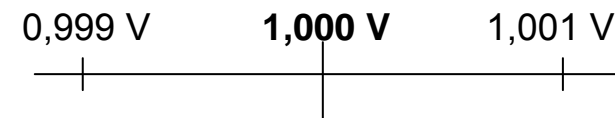
**„Platzhalter“ ist der Messwert (höchste Wahrscheinlichkeit)**

- absolute Messunsicherheit (mit phys. Einheit) z.B.

$$U_{\text{abs}}: 1\text{V} \pm 1\text{ mV}$$

- relative Messunsicherheit (ohne Einheit)

$$\begin{aligned} U_{\text{rel}} &= U_{\text{abs}} / \text{Sollwert}^*) \\ &= 1\text{mV} / 1\text{V} = 1\text{ mV/V} \\ &= 1 \cdot 10^{-3} = 0,1\ \% \end{aligned}$$



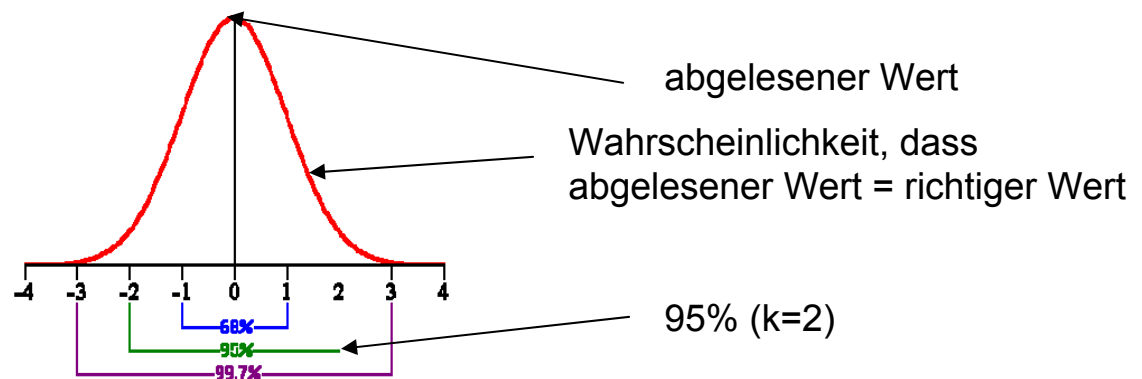
- weitere Schreibweisen: „ppm“, „ppb“, %, ‰, 10<sup>-6</sup>

\*) nicht möglich bei Sollwert = 0 [V, A, etc.]

# Messunsicherheit

## mathematische Grundlagen

**erweiterte Messunsicherheit = Intervall wird in 95% der Fälle eingehalten**






**Beispiel:**  
Messwert: 1,000 V  
MU:  $\pm 0,001$  V

d.h. mit 95% Wahrscheinlichkeit liegt der richtige Wert zwischen 0,999 V und 1,001 V

Der Messwert ist immer nur der „beste“ Schätzwert innerhalb des Unsicherheitsintervalls

# Messunsicherheit

## Beiträge und Modellbildung

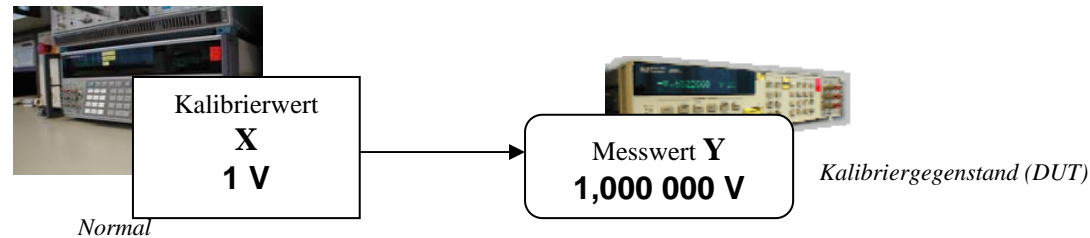
- Beiträge durch das Kalibriernormal 
- Beiträge durch das Verfahren 
- Beiträge durch den Kalibriergegenstand (Beobachtung am Prüfling) 



---

**SUMME = Messunsicherheit im Kalibrierschein**  
**(Modellgleichung)**

## Mathematik und Modell



- Modellgleichung:

$$Y - \Delta Y + \delta Y_{DUT} = X + \delta X_{Normal} + \delta X_{Verfahren}$$

- $Y$  angezeigter Wert am DUT (Messwert)
- $\Delta Y$  Abweichung des DUT
- $X$  eingestellter Wert am Kalibrator (Kalibrierwert)
- $\delta X_{Normal}$  Abweichung des Kalibrierwerts des Normals
- $\delta X_{Verfahren}$  Abweichung aufgrund des Verfahrenseinflusses
- $\delta X_{DUT}$  Abweichung aufgrund des Einflusses des DUT

## Messunsicherheit

### Beiträge durch das Kalibriernormal (Untermmodell)

- „Sichere“ Herstellerspezifikation  $dX_{Spez}$

$$\delta X_{Normal} = \delta X_{Spez}$$

10  $\mu V$

- „unsichere Herstellerspezifikation“ aus dem Kalibrierschein  $dX_{Kal}$

$$\delta X_{Normal} = \delta X_{Spez} + \delta X_{Kal} / 2$$

5  $\mu V$

1  $\mu V$

- maximale Nominalabweichung („eigene“ Spezifikation)

$$\delta X_{Normal} = \delta X_{Nominal} + \delta X_{Kal}$$

3  $\mu V$

2  $\mu V$

- Kalibrierschein(e) (genauer Wert) mit maximaler Drift  $dX_{Drift}$

$$\delta X_{Normal} = \Delta X_{Nominal} + \delta X_{Drift} + \delta X_{Kal}$$

1  $\mu V$

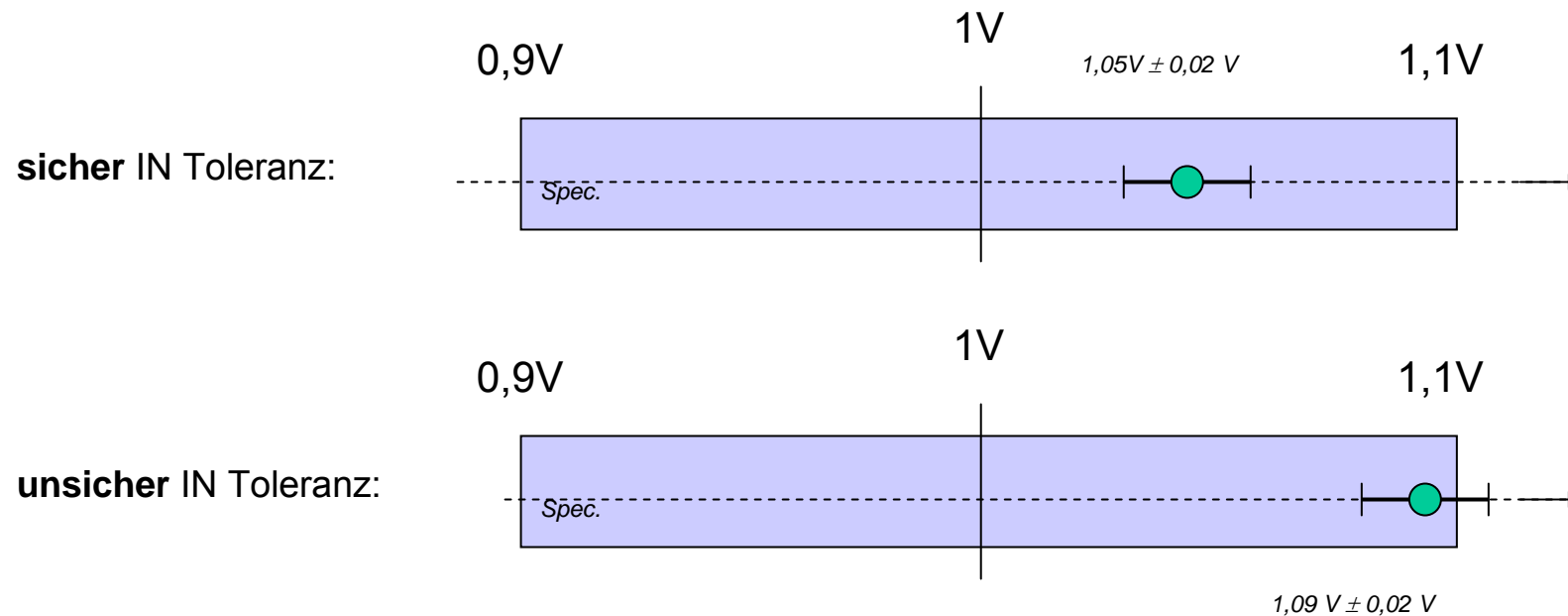
2  $\mu V$

**Aber:** mit Verringerung der MU steigender Aufwand

## Messunsicherheit und Spezifikation

- „unsichere“ Spezifikationsaussagen bei Berücksichtigung von Messunsicherheit sind möglich (Messwert ist Intervall!)

z.B.  $\pm 0,02$  V Messung bei  $\pm 0,1$  V Spezifikation



→ kein Einfluss solange MU 4x kleiner als Spezifikation (TUR>4) und Lage im Toleranzfeld <80 %



# Messunsicherheit

## Beiträge durch den Kalibriergegenstand

- Auflösung der Anzeige („Digitfehler“, kleinster Ziffernschritt) oder Ablesefehler (z.B. Zeigerinstrument)
- Wiederholbarkeit
- Rauschen
- Zufälliger Offset
- Fehlanpassung
- Hysterese

$$\delta Y_{DUT} = \delta Y_{resolution} + \delta Y_{rep} + \delta Y_{noise} + \delta Y_{offset} + \delta Y_{mismatch} + \delta Y_{hys}$$

## Anzeige des DUT

Stabile Digitalanzeige:

gerundet aus:

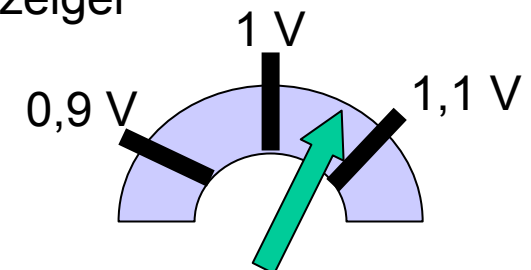
1,001 V      1,0005 V  
 oder       $\Rightarrow$  Rundungsintervall  $\pm 0,0005$  V (0,5 Digit)  
 1,0014 V

Instabile Digitalanzeige:

1,001 V }  
 1,005 V }  $\Rightarrow \varnothing 1,003$  V  $\pm 0,002$  V  
 1,003 V }

Analogzeiger

:



$\approx 1,05$  V  $\pm 0,05$  V

Strahlenschärfe:



$\Rightarrow \varnothing 5$  SKT  $\pm 0,1$  SKT

# Messunsicherheit

## Beiträge durch das Verfahren

- Thermospannungen
- Leitungswiderstände
- EMV Einstrahlung
- Umgebungsfeuchte oder Temperatur
- Parasitäre Kapazitäten / Induktivitäten

$$\delta X_{\text{Verfahren}} = \delta X_{\text{EMF}} + \delta X_{\text{R-Leads}} + \delta X_{\text{EMC}} + \delta X_{\text{Ambient}} + \delta X_{\text{Z}}$$

## Messunsicherheit

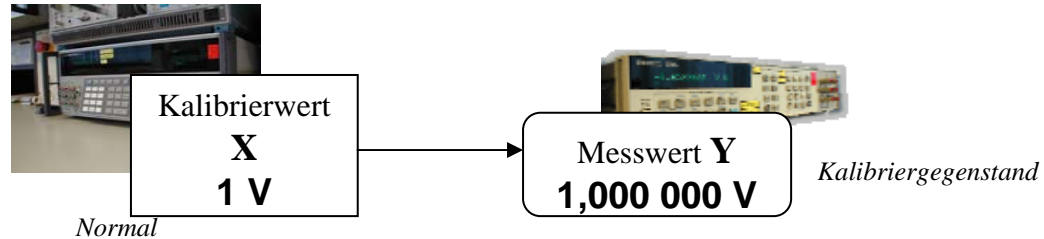
### Gewichtung der Halbbreiten und Einflüsse

Abweichung	Intervall	Verteilung (Gewichtung)	gewichteter Beitrag
z.B. „gemessene“ Abweichung	$\pm \sigma$	Normal, N	$\pm \sigma / \sqrt{N}$
„wahrscheinliche“ Abweichung	$\pm a$	Normal, k	$\pm a/k$
„maximal unbekannte“ Abweichung	$\pm b$	Rechteck	$\pm b/\sqrt{3}$
„maximal bekannte“ Abweichung	$\pm c$	U-Verteilung	$\pm c/\sqrt{2}$
Gesamt		k=2	$2\sqrt{\text{Quadratesumme}}$

N = Stichprobenlänge

$\sigma$  = empirische Standardabweichung

## Geometrische MU Addition



$$\Delta Y = Y - X - \delta X_{Normal} - \delta X_{Verfahren} + \delta Y_{DUT}$$

Größe	Intervall (Halbbreite)	Verteilung (Gewichtung)	gewichteter Beitrag
Auflösung $\delta Y_{DUT}$	$\pm 0,000\ 0005\ V$	Rechteck	0,29 $\mu V$
Kalibrator $\delta X_{Normal}$	$\pm 6\ \mu V$	Normal, k=2	3 $\mu V$
Verfahren-MU $\delta X_A$	$\pm 1\ \mu V$	Rechteck	0,58 $\mu V$
Gesamt	$\sqrt{\text{Quadratsumme}} =$		3,1 $\mu V$
Erweiterte MU	95 % Überdeckung	k=2	6,2 $\mu V$

## Lineare MU-Addition

### Vereinfachung ohne Gewichtung

- |  |                   |
|--|-------------------|
| • Beiträge durch das Kalibriernormal     | 6 $\mu\text{V}$   |
| • Beiträge durch das Verfahren           | 1 $\mu\text{V}$   |
| • Beiträge durch den Kalibriergegenstand | 0,5 $\mu\text{V}$ |

---

**SUMME = „Worst Case“ Messunsicherheit = 7,5  $\mu\text{V}$**

(genaue Unsicherheit von 6,1  $\mu\text{V}$  wird überschätzt, jedoch „verschenkt“)

# Messunsicherheit

## Vereinfachung

- Kalibrierung weist „sichere“ Spezifikation innerhalb  $\pm a_{Spez}$  nach

$$\delta X_{Normal} = \delta X_{Spez}$$

- Verfahreneinfluss durch optimalen Messaufbau  $\ll$  Normaleinfluss

$$\delta X_{Verfahren} \rightarrow 0$$

- stabile, wiederholbare Messung am DUT

$$\delta X_{DUT} = \delta X_{resolution}$$

- Modellgleichung und MU vereinfachen sich genähert auf  
Spezifikation und Auflösung des DUT

$$\Delta Y = Y - X - \delta X_{Spez} - \delta X_{resolution} \quad U(\Delta Y) \approx \sqrt{a_{Spez}^2 + (0,5 \text{ Digit})^2}$$

$$U_{WorstCase}(\Delta Y) > U(\Delta Y) \approx a_{Spez} + 1 \text{ Digit}$$

## Beispiel

- Kalibratorspezifikation =  $6 \mu\text{V} @ 23 \text{ }^\circ\text{C} \pm 3 \text{ K}$  ( $k=2$ )
- Gemäß Kalibrierschein immer „sicher“ innerhalb der Spezifikation
- Verfahrenseinfluss  $\ll$  Spezifikation  $1 \mu\text{V}$
- Auflösung am Messobjekt =  $1 \mu\text{V}$

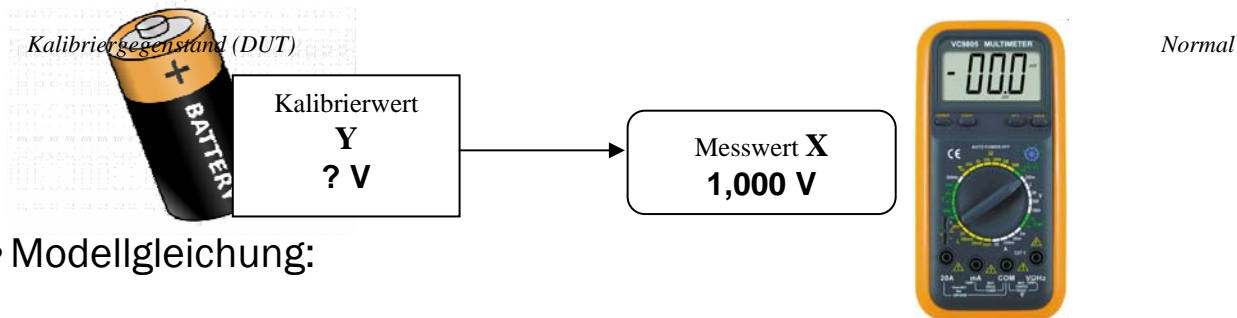
Geschätzte MU =  $6 \mu\text{V} + 1 \mu\text{V} = 7 \mu\text{V}$

Größe	Intervall (Halbbreite)	Verteilung (Gewichtung)	gewichteter Beitrag
Auflösung $\delta Y_{DUT}$	$\pm 0,000\ 0005 \text{ V}$	Rechteck	$0,29 \mu\text{V}$
Kalibrator $\delta X_{Spez}$	$\pm 6 \mu\text{V}$	Normal, $k=2$	$3 \mu\text{V}$
Verfahren-MU $\delta X_A$	$\pm 1 \mu\text{V}$	Rechteck	$0,58 \mu\text{V}$
Gesamt	$\sqrt{\text{Quadratsumme}} =$		$3,1 \mu\text{V}$
Erweiterte MU	95 % Überdeckung	$k=2$	$6,2 \mu\text{V}$



## Beispiel 2

Messung einer unbekannten Spannung an einem DMM



• Modellgleichung:

$$Y + \delta Y_{DUT} = X + \delta X_{Normal} + \delta X_{Verfahren} + \delta X_{resolution}$$

$Y$  unbekannte Spannung

$X$  Messwert am DMM

$\delta Y_{DUT}$  Abweichung aufgrund des Einflusses des DUT

$\delta X_{Spez}$  unbekannte Abweichung des DMM

$\delta X_{Verfahren}$  Abweichung aufgrund des Verfahrenseinflusses

$\delta X_{resolution}$  Abweichung durch die endliche Auflösung / Ziffernschritt des DMM

## Beispiel 2

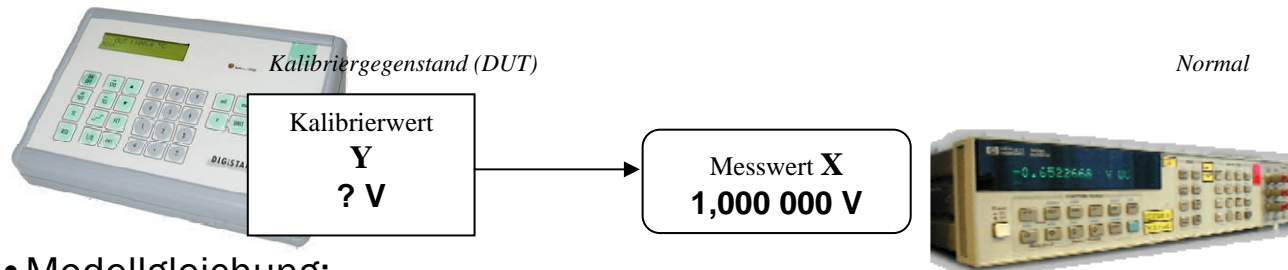
- DMM Spezifikation = 0,2 % = 0,002 V (“worst case”)
- Gemäß Kalibrierschein immer „sicher“ innerhalb der Spezifikation
- Verfahrenseinfluss  $\ll$  Spezifikation 3  $\mu$ V
- Auflösung am DMM = 1 mV

Geschätzte MU = 2 mV + 1mV = 3 mV

Größe	Intervall (Halbbreite)	Verteilung (Gewichtung)	gewichteter Beitrag
Auflösung $\delta X_{resolution}$	$\pm 0,5$ mV	Rechteck	0,29 mV
DMM $\delta X_{Spez}$	$\pm 2$ mV	Rechteck	1,2 mV
Verfahren-MU $\delta X_A$	$\pm 3$ $\mu$ V	Rechteck	0,0 mV
Gesamt	$\sqrt{\text{Quadratsumme}} =$		1,2 mV
Erweiterte MU	95 % Überdeckung	k=2	2,4 mV

## Beispiel 3

Hochauflösende Messung einer unbekannten Spannung an einem DMM



• Modellgleichung:

$$Y + \delta Y_{DUT} = X + \delta X_{Normal} + \delta X_{Kal} + \delta X_{Verfahren} + \delta X_{resolution}$$

$Y$  unbekannte Spannung

$X$  Messwert am DMM

$\delta Y_{DUT}$  Abweichung aufgrund des Einflusses des DUT

$\delta X_{Spez}$  unbekannte Abweichung des DMM (Spezifikation)

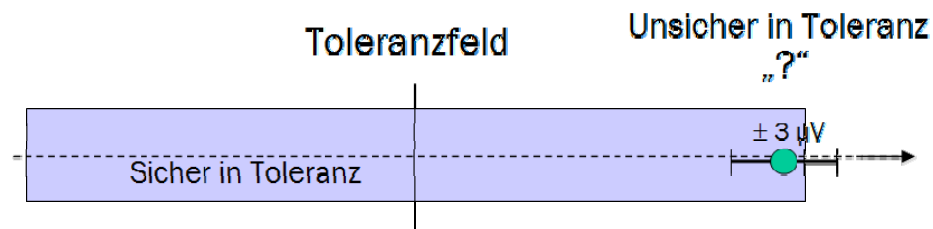
$\delta X_{Verfahren}$  Abweichung aufgrund des Verfahrenseinflusses

$\delta X_{resolution}$  Abweichung durch die endliche Auflösung / Ziffernschritt des DMM

$\delta X_{Kal}$  Abweichung durch die Kalibrierunsicherheit des DMM

### Beispiel 3

- DMM Spezifikation = 4  $\mu\text{V}$  (“worst case” oder “eigendefiniert”)
- Gemäß Kalibrierschein mit 3  $\mu\text{V}$  nicht sicher innerhalb der Spezifikation (eigentlich nur 1,5  $\mu\text{V}$  „unsichere“ Überlappung)



- Verfahrenseinfluss  $\ll$  Spezifikation 0,3  $\mu\text{V}$
- Auflösung am DMM = 1  $\mu\text{V}$

$$\text{Geschätzte MU} = 4 \mu\text{V} + 3 \mu\text{V} + 1 \mu\text{V} = 8 \mu\text{V}$$

## Beispiel 3

Geschätzte MU =  $4 \mu\text{V} + 3 \mu\text{V} + 1 \mu\text{V} = 8 \mu\text{V}$

Größe	Intervall (Halbbreite)	Verteilung (Gewichtung)	gewichteter Beitrag
Auflösung $\delta X_{\text{resolution}}$	$\pm 0,5 \mu\text{V}$	Rechteck	$0,29 \mu\text{V}$
DMM $\delta X_{\text{Spez}}$	$\pm 4 \mu\text{V}$	Rechteck	$2,3 \mu\text{V}$
Kalibrierung DMM $\delta X_{\text{Kal}}$	$\pm 3 \mu\text{V} / 2$	Normal, k=2	$0,75 \mu\text{V}$
Verfahren-MU $\delta X_A$	$\pm 1 \mu\text{V}$	Rechteck	$0,58 \mu\text{V}$
Gesamt	$\sqrt{\text{Quadratesumme}} =$		$2,5 \mu\text{V}$
Erweiterte MU	95 % Überdeckung	k=2	$5 \mu\text{V}$

## Zusammenfassung

- Vereinfachung gilt für lineare Modelle
- Vereinfachung kann die MU abschätzen
- „eigendefinierte“ oder Hersteller-Spezifikation kann in vielen Fällen die Rahmenparameter hierfür liefern
- Die Information der Sicherheit der Konformitätsbewertung (sicher in Toleranz?) ist immer nötig
- Auflösung / Ziffernschritt ist ein wesentlicher Anteil



## Fazit: Schätzen ist OK!

