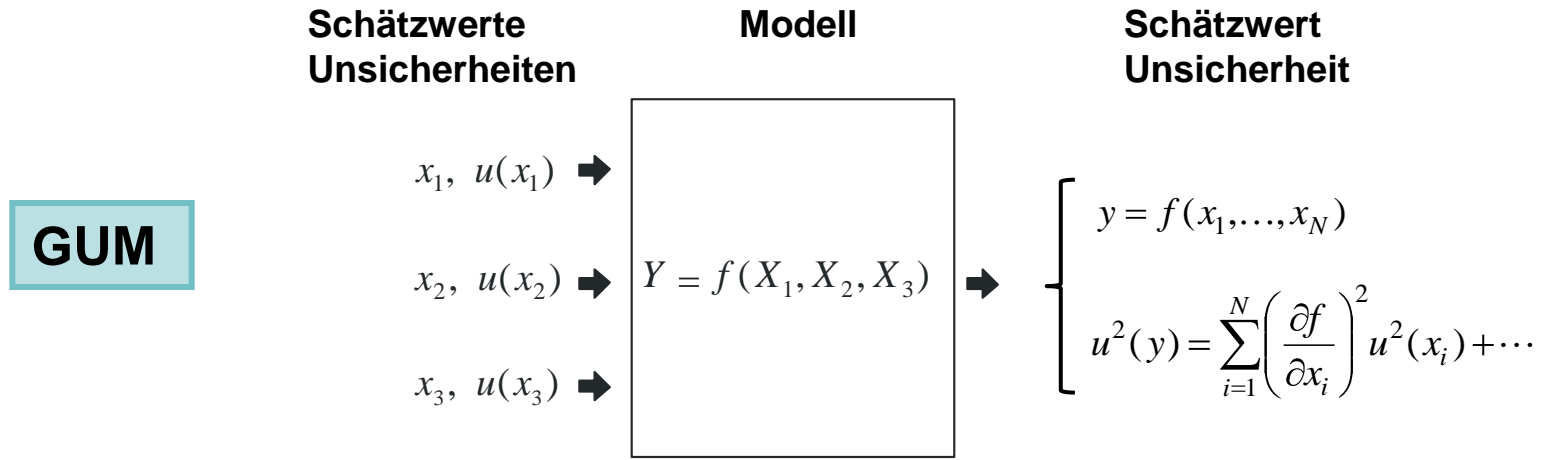


# Monte-Carlo-Verfahren nach GUM Supplement 1

Gerd Wübbeler

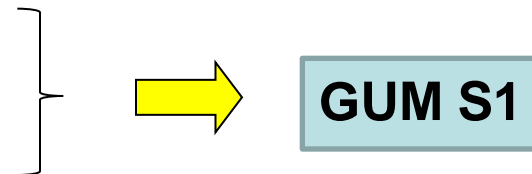
Physikalisch-Technische Bundesanstalt

- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen**
- **Monte-Carlo Verfahren**
- **Beispiele**
- **Adaptive Monte-Carlo Verfahren**



## Einschränkungen seitens des GUM

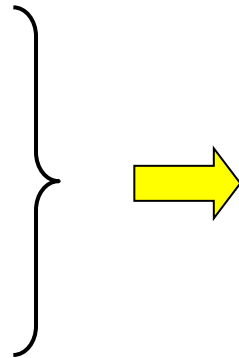
- Linearität des Modells
- Annahmen über Verteilungen



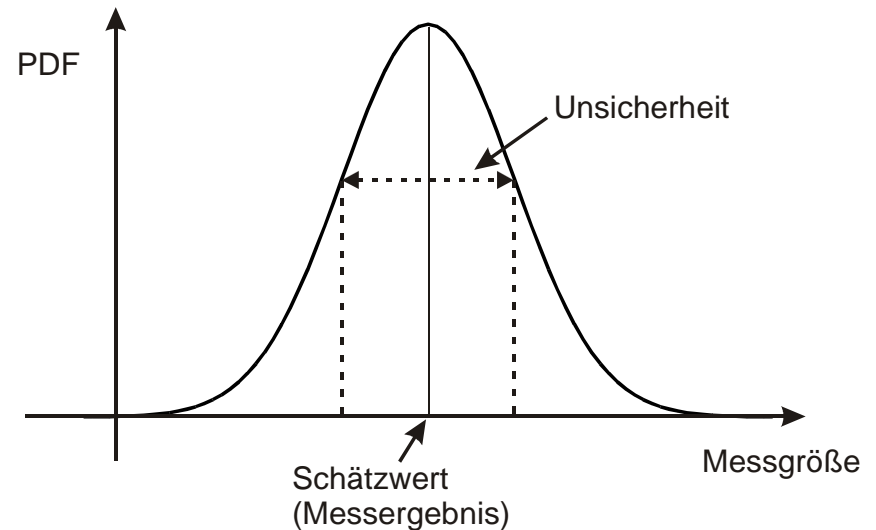
Messdaten

Modell

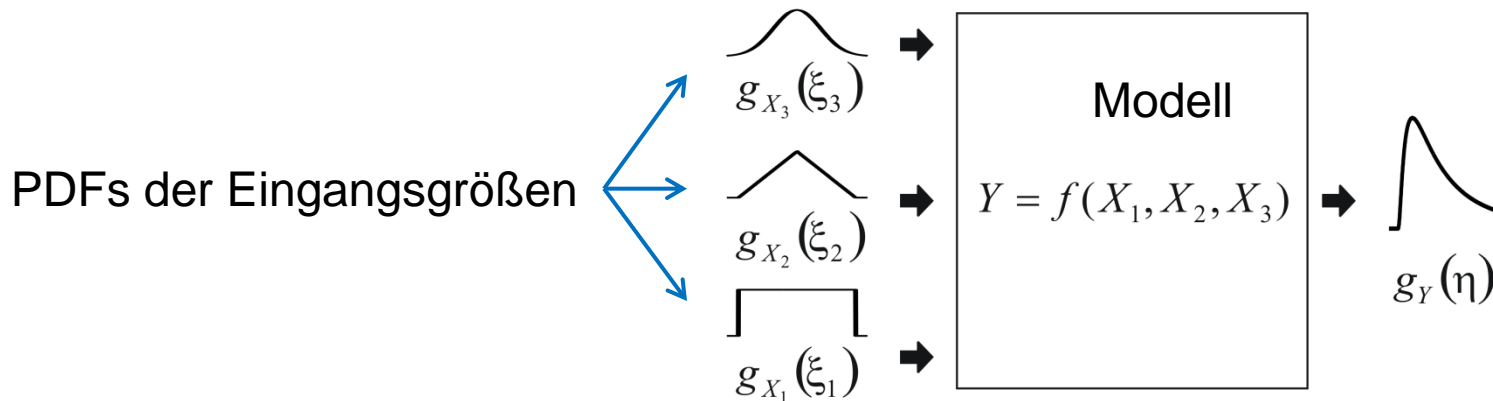
weitere Information



## Wahrscheinlichkeitsdichte PDF



- **Quantitative** Beschreibung der **Kenntnis** über die Messgröße via **PDF**
- Numerische Berechnung der **PDF** mittels **Monte Carlo Verfahren**



## Transformation von Zufallsvariablen

### Berechnungsmethode: Monte-Carlo Methode (MCM)

- i.i.d. Samples aus der Verteilung (PDF) der Messgröße
- Anwendbar in vielen Fällen (nichtlineare Modelle)

## Information



## PDF

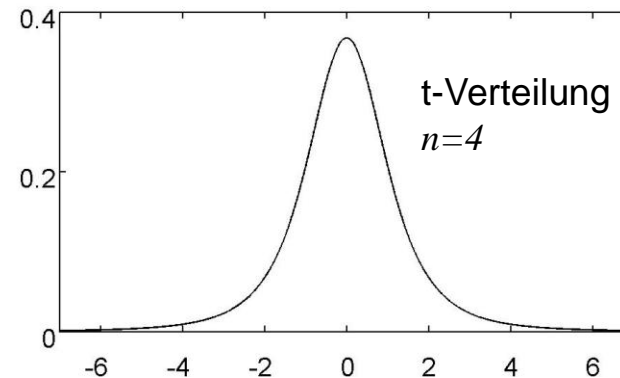
Messwerte aus  
Gauss-Verteilung

Skalierte und verschobene t-Verteilung  
mit  $n - 1$  Freiheitsgraden

$x_1, \dots, x_n$

$$p(\mu | x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{s/\sqrt{n}} t_{n-1} \left( \frac{\mu - \bar{x}}{s/\sqrt{n}} \right)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$



**Information** → **PDF**

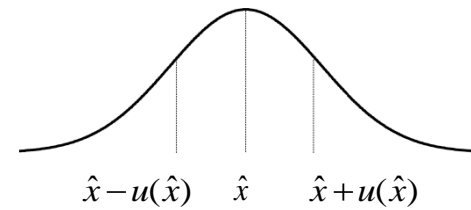
$$a \leq x \leq b$$

→ **Gleichverteilung über [a,b]**



$$\hat{x}, u(\hat{x})$$





→ **Gauss-Verteilung**



•  
•  
•

**Tabelle 1 im GUM S1**

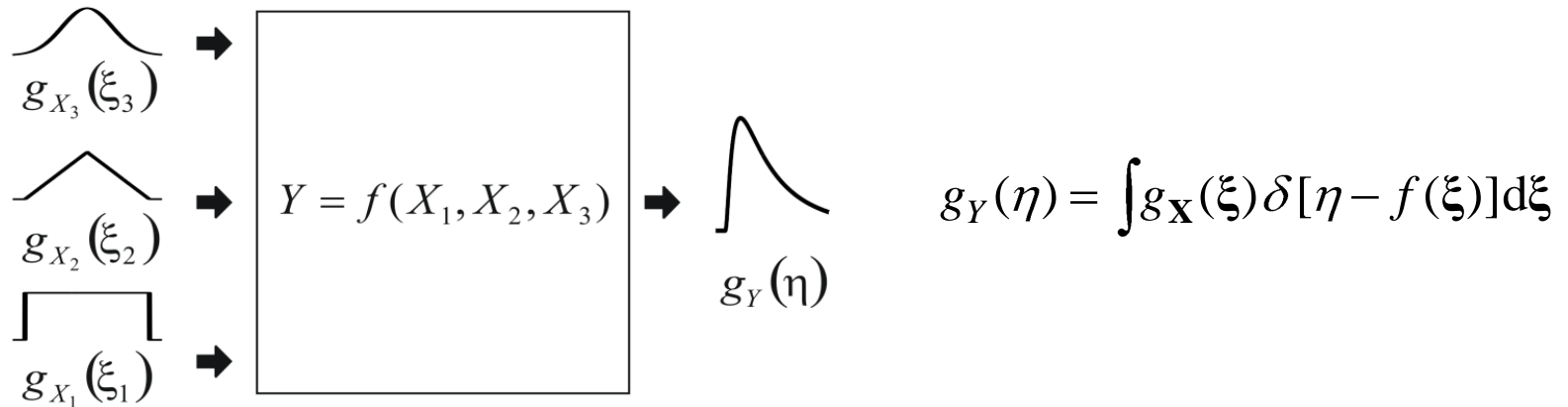
Table 1 — Available information and the PDF assigned on the basis of that information (6.4.1, C.1.2)

Available information	Assigned PDF and illustration (not to scale)	Subclause
Lower and upper limits $a, b$	Rectangular: $R(a, b)$	 6.4.2
Inexact lower and upper limits $a \pm d, b \pm d$	Curvilinear trapezoid: $C\text{Trap}(a, b, d)$	 6.4.3
Sum of two quantities assigned rectangular distributions with lower and upper limits $a_1, b_1$ and $a_2, b_2$	Trapezoidal: $\text{Trap}(a, b, \beta)$ with $a = a_1 + a_2,$ $b = b_1 + b_2,$ $\beta =  (b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)  / (b - a)$	 6.4.4
Sum of two quantities assigned rectangular distributions with lower and upper limits $a_1, b_1$ and $a_2, b_2$ and the same semi-width ( $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$ )	Triangular: $T(a, b)$ with $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$	 6.4.5

- 
- 
- 

## GUM Supplement 1 (2008)

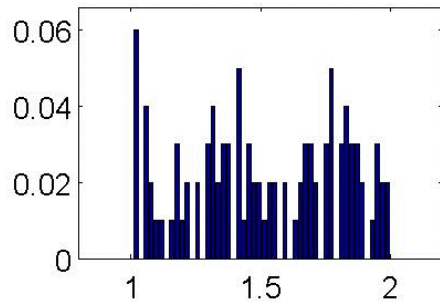
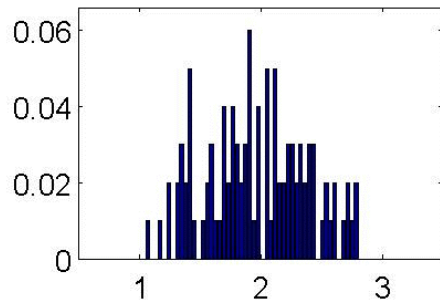
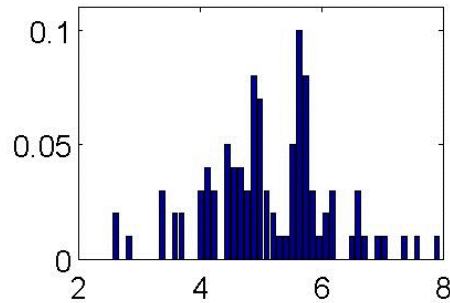




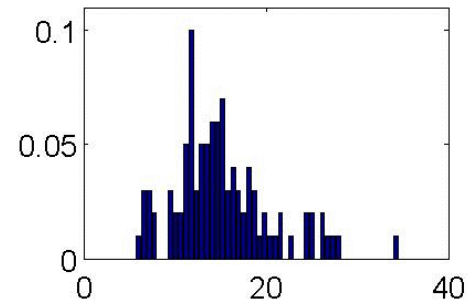
## Lineare Näherung der Modell-Funktion

$$f(\xi) \approx f(\mathbf{x}) + (\xi - \mathbf{x})^T (\nabla f(\mathbf{x})) \longrightarrow \text{GUM-Formeln}$$

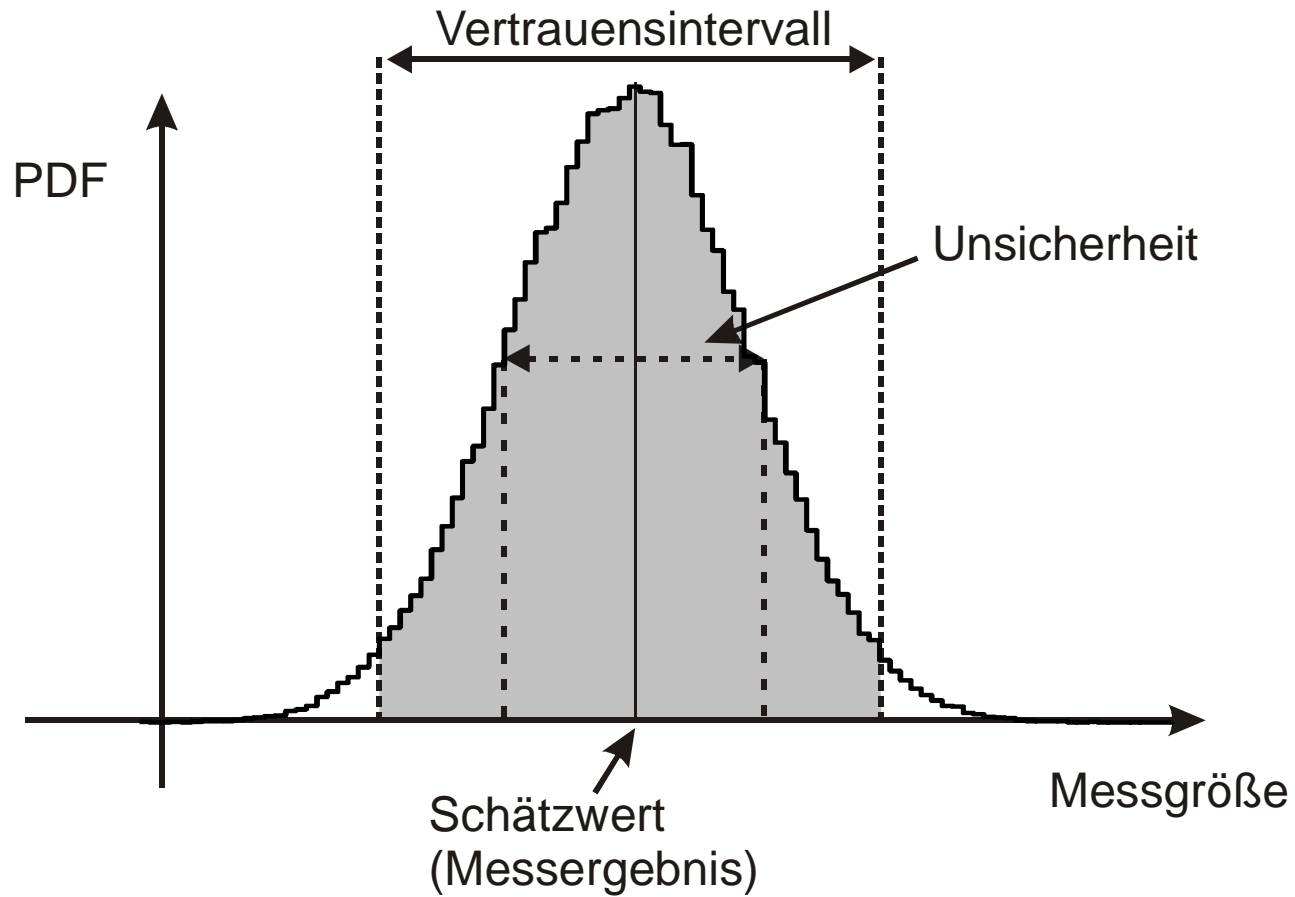
$10^2$  Ziehungen



$$Y = X_1 X_2 X_3$$



```
M=1e5;  
x1=5+randn(M,1);  
x2=1+rand(M,1)+rand(M,1);  
x3=1+rand(M,1);  
y=x1.*x2.*x3;  
hist(y,100);
```



# Vergleich: GUM - GUM S1

**Modell**

$$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

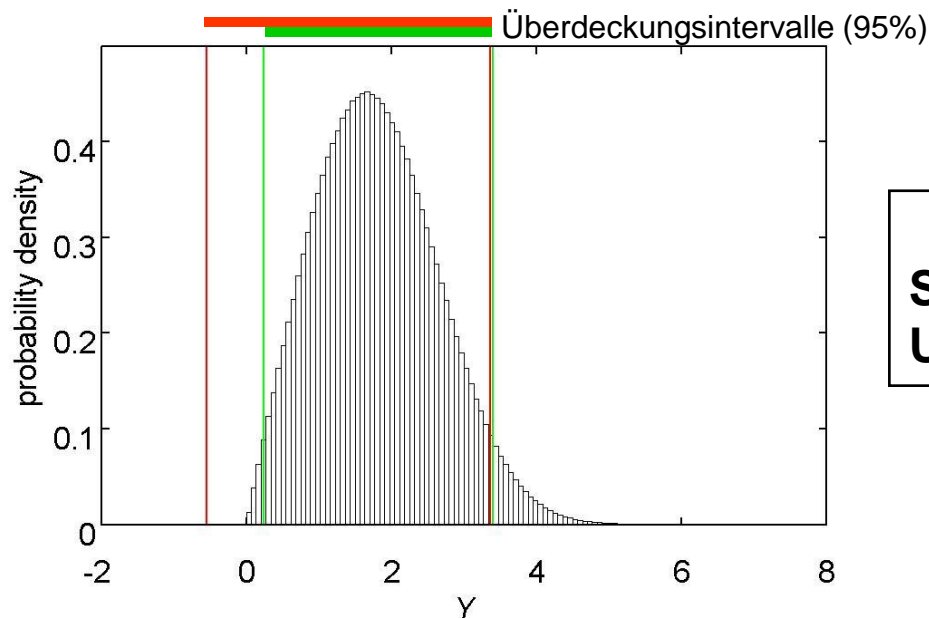
**Schätzwerte**

$$x_1 = x_2 = 1$$

**Unsicherheiten**

$$u(x_1) = u(x_2) = 1$$

➔ **Gauss-Verteilungen**  
(unkorreliert)

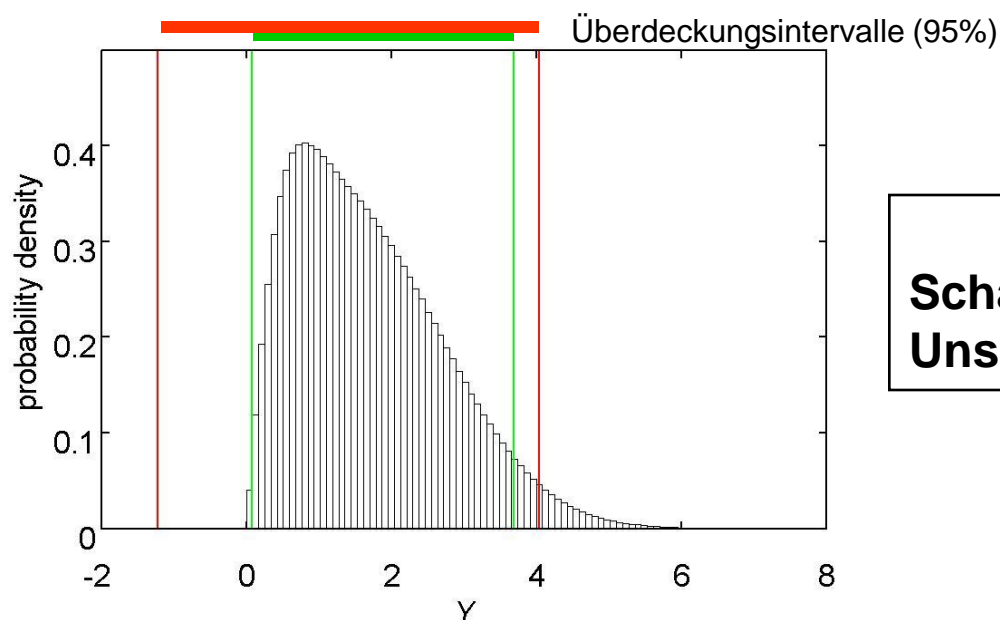


	<b>GUM</b>	<b>GUM S1</b>
<b>Schätzwert</b>	<b>1.41</b>	<b>1.81</b>
<b>Unsicherheit</b>	<b>1.00</b>	<b>0.845</b>

- **Resultate von GUM und GUM S1 können unterschiedlich sein**
- **GUM S1 im Zweifelsfall verbindliche MU Methode**

<b>Modell</b>	$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$
<b>Schätzwerte</b>	$x_1 = x_2 = 1$
<b>Unsicherheiten</b>	$u(x_1) = u(x_2) = 1$ $\rho = 0.8$

➔ **Gauss-Verteilungen**  
(korreliert)



	<b>GUM</b>	<b>GUM S1</b>
<b>Schätzwert</b>	<b>1.41</b>	<b>1.71</b>
<b>Unsicherheit</b>	<b>1.34</b>	<b>1.04</b>

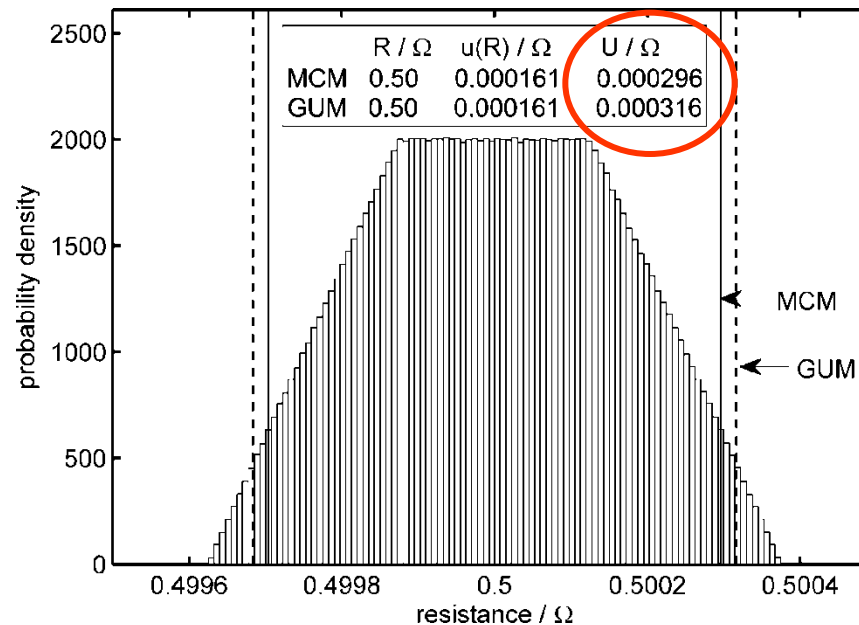
- **Resultate von GUM und GUM S1 können unterschiedlich sein**
- **GUM S1 im Zweifelsfall verbindliche MU Methode**

## Digitalmultimeter

<b>Modell</b>	$R = U / I$
<b>Schätzwerte</b>	1 V und 2 A
<b>Unsicherheiten</b>	$\frac{0.001}{\sqrt{12}}$ V, $\frac{0.001}{\sqrt{12}}$ A



**Gleichverteilungen**  
(unkorreliert)

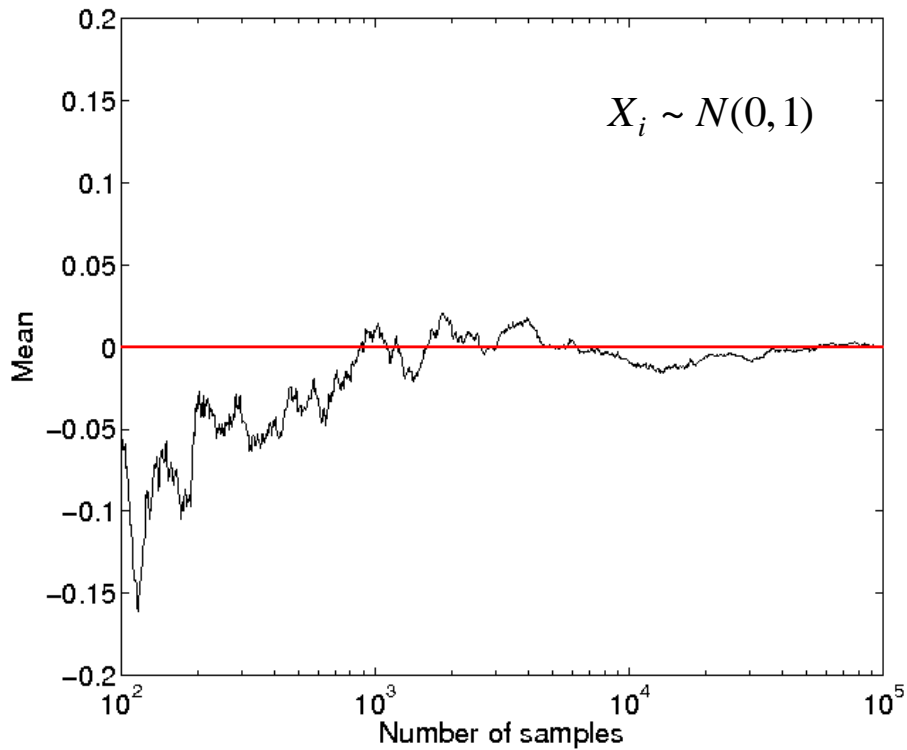


**Monte-Carlo Methode (MCM)**

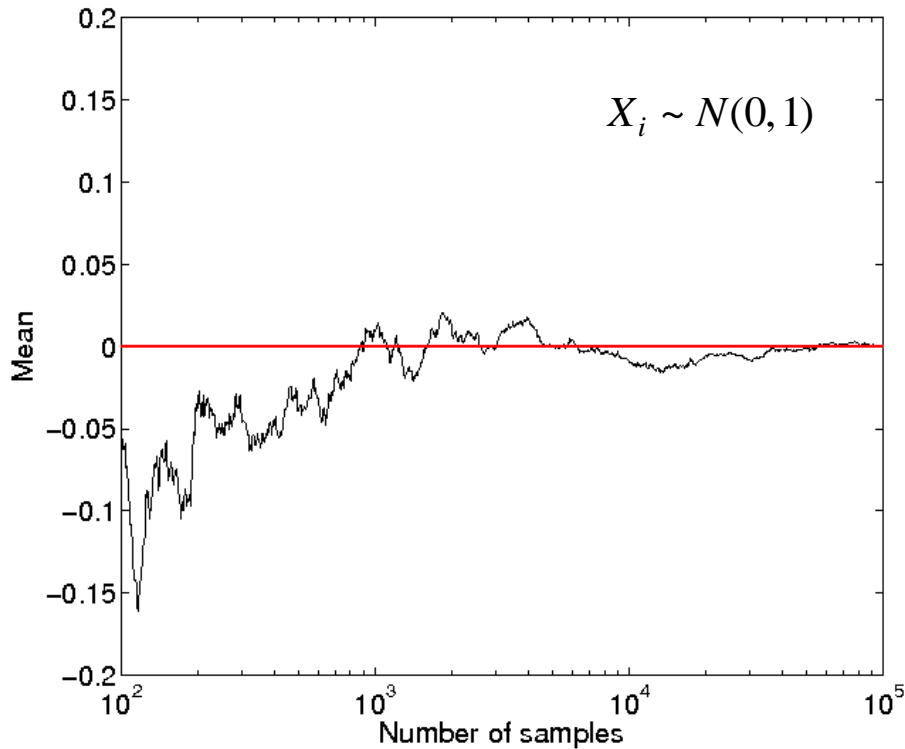
- Monte-Carlo Resultate weisen i.A. zufällige Schwankungen auf
- Spezifikation der Genauigkeit der Ergebnisse notwendig

## Adaptive Monte-Carlo Verfahren

**Ziel** Durchführen der MCM bis eine **gewählte Genauigkeit** mit einer vorgegebenen **Wahrscheinlichkeit** erreicht ist  
(mit möglichst wenigen Ziehungen)







**Gesucht**

**Abbruchkriterium zum Erreichen  
einer spezifizierten Genauigkeit**

## Adaptives Verfahren nach GUM S1 (7.9) nicht optimal

IOP PUBLISHING

Metrologia 47 (2010) 317–324

METROLOGIA

doi:10.1088/0026-1394/47/3/023

## A two-stage procedure for determining the number of trials in the application of a Monte Carlo method for uncertainty evaluation

Gerd Wübbeler<sup>1</sup>, Peter M Harris<sup>2</sup>, Maurice G Cox<sup>2</sup> and Clemens Elster<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB), Abbestrasse 2-12, 10587 Berlin, Germany

<sup>2</sup> National Physical Laboratory, Hampton Road, Teddington TW11 0LW, UK

Received 9 February 2010, in final form 31 March 2010

Published 4 May 2010

Online at [stacks.iop.org/Met/47/317](http://stacks.iop.org/Met/47/317)

### Abstract

Adaptive Monte Carlo schemes can be used to determine the number of Monte Carlo trials (the number of evaluations of the measurement model) necessary for the evaluation of uncertainty according to Supplement 1 to the GUM (GUM S1). The goal is to reach a prescribed numerical accuracy of the Monte Carlo results (the estimate, associated standard uncertainty

- **Zweistufiges Schema nach Stein**
- **Spezifizierte Genauigkeit beweisbar**

- + MCM flexibles Werkzeug zur Berechnung von Messunsicherheiten, insbes. für nichtlineare Modelle und beliebige Verteilungen**
- + GUM S1 im Zweifelsfall verbindliche MU Methode**
- + GUM als Spezialfall enthalten (Linearisierung)**
- Monte-Carlo Ergebnisse selbst unsicher**
- Messunsicherheitsbudget erfordert zusätzliche Berechnungen**
- Weitergabe von Verteilungen nicht geregelt**