Physikalisch-Technische Bundesanstalt
Braunschweig und Berlin

Messunsicherheiten und Matrizenrechnung

T. Funck
Arbeitsgruppe 2.13 „Wechsel-Gleich-Transfer, Impedanz”

260. PTB Seminar am 21. Mai 2011

Inhalt

- Motivation
- Definition
- Darstellung
- Rechenoperationen
- Anwendung
    - Lineare Gleichungssysteme
    - Regression
    - Kovarianzen
- Abschluss

Im GUM und in der DIN 1319-4 kommen vor:

Messunsicherheitsmatrix

Kovarianzmatrix

Einheitsmatrix

...

Was ist eigentlich eine Matrix?

Definition

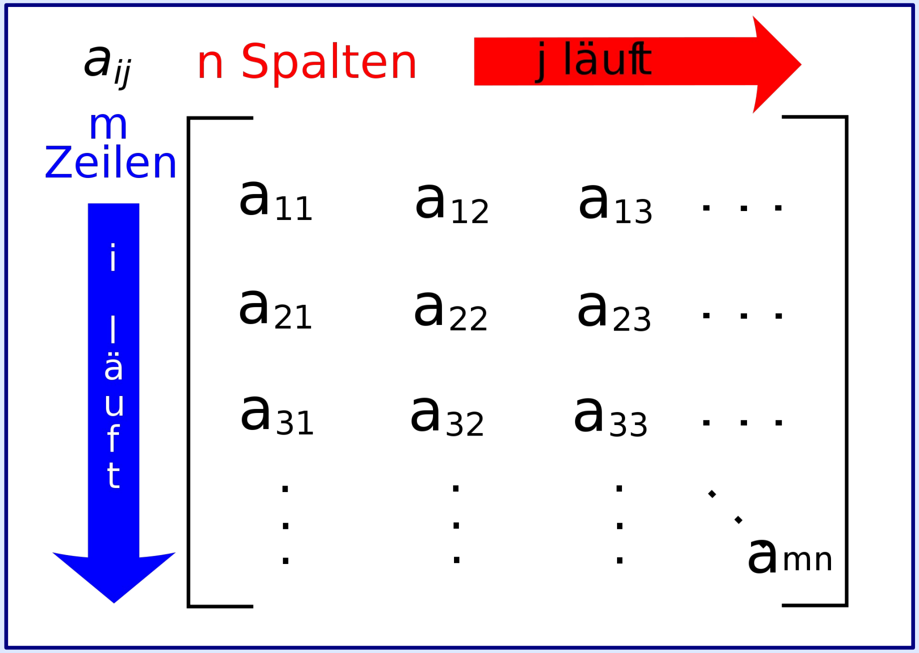
Eine **Matrix** (Plural: Matrizen)
ist eine rechteckige Anordnung (Tabelle) von Zahlen, mit denen auf bestimmte Art gerechnet werden kann.

Matrizen stellen Zusammenhänge übersichtlich dar und erleichtern damit Rechen- und Gedankenvorgänge.

Die Bezeichnung „Matrix“ wurde 1850 von James Joseph Sylvester (englischer Mathematiker und Professor für Physik) eingeführt.

Matrizen werden mit halbfetten, kursiven lateinischen Großbuchstaben bezeichnet, manchmal auch unterstrichen.

Eine sogenannte „*m•n* Matrix“ *A* besteht aus *m•n* Elementen a_{ij}, die in *m* Zeilen zu je *n* Spalten angeordnet sind.



(Abbildung aus: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Matrix_german.svg)

Darstellung (2)

Als Notation hat sich die Aneinanderreihung der Elemente in Zeilen und Spalten zwischen großen Klammern durchgesetzt.

Die Form der Klammern ist nicht einheitlich festgelegt; es werden runde oder eckige Klammern verwendet.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Rechenoperationen (Addition)

Mit Matrizen kann man rechnen wie mit Zahlen:

- **Addition und Subtraktion:**

Zwei Matrizen können addiert (subtrahiert) werden, wenn sie dieselbe Anzahl von Zeilen und dieselbe Anzahl von Spalten besitzen.

Die Summe zweier Matrizen errechnet sich, indem man jeweils die Elemente der beiden Matrizen addiert:

$$\boxed{A+B := \left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{i=1\ldots m,\, j=1\ldots n}}$$

Rechenoperationen (Multiplikation mit Skalar)

- **Multiplikation mit einer Zahl (Skalar):**

Eine Matrix wird mit einer Zahl multipliziert, indem alle Elemente der Matrix mit der Zahl multipliziert werden:

$$\lambda \cdot A := \left(\lambda \cdot a_{ij} \right)_{i=1\ldots m,\, j=1\ldots n}$$

Rechenoperationen (Matrizen-Multiplikation)

- **Multiplikation von Matrizen:**

Zwei Matrizen können multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der linken mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt. Die Berechnung erfolgt nach dem Schema „linke Zeile mal rechte Spalte“.

Im allgemeinen gilt:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Rechenoperationen (Einheitsmatrix)

- **Einheitsmatrix *E*:**

Eine besondere Rolle bezüglich der Matrizenmultiplikation spielt die quadratische Matrix *E*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt für beliebige Matrizen *A* :

$$\boxed{E \cdot A = A \cdot E = A}$$

Rechenoperationen (Inverse)

- **Inverse Matrix A^{-1}:**

Eine Division durch eine Matrix ist nicht möglich, jedoch kann sie oft durch die Multiplikation mit einer „inversen Matrix" ersetzt werden:

Für manche quadratische Matrizen *A* gibt es eine Matrix A^{-1}, für die gilt:

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}$$

Rechenoperationen (Transponierte)

- **Transponierte Matrix A^T:**

Das Transponieren einer Matrix A ist keine wirkliche Rechenoperation, eher ein Umsortieren der Elemente. Es werden nämlich Zeilen und Spalten vertauscht, d.h. die Matrix wird an ihrer Hauptdiagonalen gespiegelt.

Das Produkt $A \bullet A^T$ kann immer gebildet werden und wird häufig benötigt.

- **Auflösen von Gleichungen:**

$$A \cdot X = B$$
$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$E \quad \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = A^{-1} \cdot B$$

Multiplikation mit der inversen von *A* „von links“

Rechenoperationen (Matrixgleichungen)

- **Auflösen von Gleichungen:**

$$X \cdot C = D$$
$$X \cdot C \cdot C^{-1} = D \cdot C^{-1}$$
$$X \cdot \quad E \quad = D \cdot C^{-1}$$
$$X = D \cdot C^{-1}$$

Multiplikation mit der inversen von *C* „von rechts“

Rechenoperationen (Vorteile)

Ein verbreitetes Vorurteil:

- **Matrizenrechnung ist höhere Mathematik, ist schwierig und ist nur etwas für Wissenschaftler.**

Richtig ist hingegegen:

- **Matrizenrechnung an sich benötigt nur die vier Grundrechenarten.**
- **Matrizenrechnung ist meistens übersichtlicher, so dass das damit zu lösende Problem im Vordergrund bleibt.**
- **Matrizenrechnung kann gut automatisiert werden. Dann erledigenen Maschinen die stupide Rechenarbeit.**
- **Matrizenrechnung ist in Tabellenkalkulations-Programmen z.B. *LibreOffice Calc* verfügbar.**

Beispiel für ein lineares Gleichungssystem mit den vier Variablen w, x, y und z:

$$\begin{aligned} w+2x+3y-4z &= 0 \\ -5w+2x &= -1 \\ 3x-4y+5z &= 3 \\ -w+z &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 8 \end{vmatrix}$$

Folgende Matrizen werden eingeführt:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot X=B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

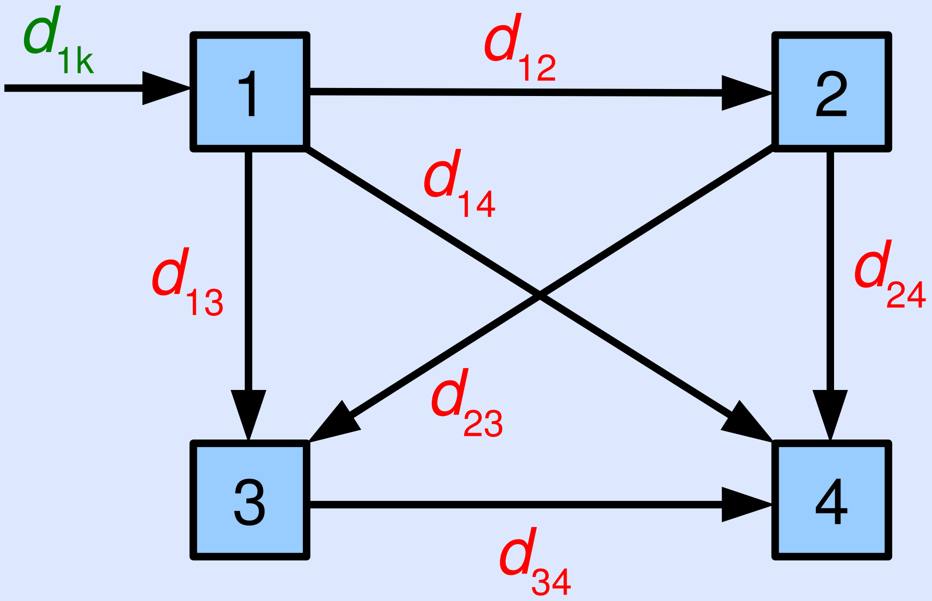
Gleichungssystem (Lösung)

$$A^{-1} = \frac{1}{164}\begin{pmatrix} 24 & -34 & 18 & 30 \\ 40 & -2 & 30 & 50 \\ 36 & -10 & -14 & 86 \\ 12 & -17 & 9 & 97 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{164}\begin{pmatrix} 24 & -34 & 18 & 30 \\ 40 & -2 & 30 & 50 \\ 36 & -10 & -14 & 86 \\ 12 & -17 & 9 & 97 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ausgleichsrechnung (Schema)

Messung von vier gleichartigen Normalen untereinander, eines ist extern kalibriert worden.



Der Kalibrierwert d_{1k} und die Differenzen d_{ij} sind bekannt.

Die Werte x_1 , x_2 , x_3 , und x_4 sollen berechnet werden.

Ausgleichsrechnung (Gleichungen)

Folgende Gleichungen können abgeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
x_1 & & & &= d_{1k}\\
x_1 &- x_2 & & &= d_{12}\\
x_1 & &- x_3 & &= d_{13}\\
x_1 & & &- x_4 &= d_{14}\\
&x_2 &- x_3 & &= d_{23}\\
&x_2 & &- x_4 &= d_{24}\\
& &x_3 &- x_4 &= d_{34}
\end{aligned}
$$

Ausgleichsrechnung (Matrizenschreibweise)

In Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1k} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \\ d_{23} \\ d_{24} \\ d_{34} \end{pmatrix}$$

$$V \cdot X = D$$

Ausgleichsrechnung (Fehlerterme)

Problem:
Sieben Gleichungen für vier Unbekannte.

Ansatz:
Zunächst ebenfalls unbekannte Fehlerterme *F* zu jeder Gleichung hinzufügen:

$$\boxed{V \cdot X = D + F \Leftrightarrow F = V \cdot X - D}$$

Die Summe der Quadrate der Fehlerterme soll minimal werden:

$$\boxed{\sum f_i^2 = min \Leftrightarrow F^{\mathrm{T}} \cdot F = min}$$

Ausgleichsrechnung (Berechnung)

Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen von $F^{\mathrm{T}} \cdot F$ nach den vier x_i folgt :

$$\boxed{V^{\mathrm{T}} \cdot F = 0 \;\Leftrightarrow\; V^{\mathrm{T}} \cdot \left(V \cdot X - D \right) = 0}$$

Auflösen nach X liefert die gesuchten Ausgleichswerte:

$$X = \left(V^{\mathrm{T}} \cdot V \right)^{-1} \cdot V^{\mathrm{T}} \cdot D$$
$$X = C \cdot D$$

Ausführen der Matrixumformungen liefert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{4} & -\tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\tfrac{1}{4} & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{4} & -\tfrac{1}{4} & 0 & \tfrac{1}{4} \\ 1 & -\tfrac{1}{4} & -\tfrac{1}{4} & -\tfrac{1}{2} & 0 & -\tfrac{1}{4} & -\tfrac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{1k} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \\ d_{23} \\ d_{24} \\ d_{34} \end{pmatrix}$$

Wie erwartet ergibt sich für x_1 der externe Kalibrierwert und für x_2, x_3 und x_4 eine Linearkombination aus diesem und den gemessenen Differenzen.

Messunsicherheiten der Eingangswerte:

$u(d_{1k}) = u_{1k}$ Messunsicherheit der unabhängigen externen Kalibrierung

$u(d_{ij}) = u_{ij}$ Messunsicherheit der gemessenen Differenzen

$$\boxed{u_{ij}^2 = u_{Fl,ij}^2 + u_{ME}^2}$$

$u_{Fl,ij}$ Messunsicherheitsbeitrag durch Fluktuation

u_{ME} Messunsicherheit der Messeinrichtung

$u_{\mathrm{FI},ij}$ individiuell für jede Messung verschieden, aber *ein* abgeschätzter Wert u_{FI} für alle Differenz-Messungen

u_{ME} identisch für alle Differenz-Messungen

Damit errechnet sich nach EA 4/02 die Kovarianz zweier beliebiger Differenz-Messungen d_{ij} und d_{kl} zu:

$$\boxed{u\left(d_{ij}, d_{kl}\right) = u_{\mathrm{ME}}^2}$$

Ausgleichsrechnung (Messunsicherheitsmatrix)

Die Messunsicherheitsmatrix U_D zu der Eingangsmatrix D ergibt sich somit gemäß DIN 1319-4 zu:

$$U_\mathrm{D} = \begin{pmatrix} u_\mathrm{1k}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_\mathrm{Fl}^2 + u_\mathrm{ME}^2 & u_\mathrm{ME}^2 & \cdots & u_\mathrm{ME}^2 \\ 0 & u_\mathrm{ME}^2 & u_\mathrm{Fl}^2 + u_\mathrm{ME}^2 & \cdots & u_\mathrm{ME}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & u_\mathrm{ME}^2 & u_\mathrm{ME}^2 & \cdots & u_\mathrm{Fl}^2 + u_\mathrm{ME}^2 \end{pmatrix}$$

Ausgleichsrechnung (Sensitivitätsmatrix)

Die Sensitivitätsmatrix G ist hier identisch mit der Koeffizientenmatrix $C = (V^T \bullet V)^{-1} \bullet V^T$.

Damit errechnet sich die Matrix U_X der Messunsicherheiten zu den Werten der Normale zu:

$$U_X = \begin{pmatrix} u^2(x_1) & u(x_1, x_2) & u(x_1, x_3) & u(x_1, x_4) \\ u(x_2, x_1) & u^2(x_2) & u(x_2, x_3) & u(x_2, x_4) \\ u(x_3, x_1) & u(x_3, x_2) & u^2(x_3) & u(x_3, x_4) \\ u(x_4, x_1) & u(x_4, x_2) & u(x_4, x_3) & u^2(x_4) \end{pmatrix} = C \cdot U_D \cdot C^T$$

Auf der Hauptdiagonalen findet man die Varianzen.

Ausgleichsrechnung (Ergebnis-Unsicherheitsmatrix)

Formales Ausführen der Matrixumformungen liefert:

$$U_\mathrm{X}=\begin{pmatrix} u_{1\mathrm{k}}^2 & u_{1\mathrm{k}}^2 & u_{1\mathrm{k}}^2 & u_{1\mathrm{k}}^2 \\ u_{1\mathrm{k}}^2 & u_{1\mathrm{k}}^2+\frac{u_{\mathrm{Fl}}^2}{2}+\frac{u_{\mathrm{ME}}^2}{4} & u_{1\mathrm{k}}^2+\frac{u_{\mathrm{Fl}}^2}{4}+\frac{u_{\mathrm{ME}}^2}{2} & u_{1\mathrm{k}}^2+\frac{u_{\mathrm{Fl}}^2}{4}+\frac{3\cdot u_{\mathrm{ME}}^2}{4} \\ u_{1\mathrm{k}}^2 & u_{1\mathrm{k}}^2+\frac{u_{\mathrm{Fl}}^2}{4}+\frac{u_{\mathrm{ME}}^2}{2} & u_{1\mathrm{k}}^2+\frac{u_{\mathrm{Fl}}^2}{2}+u_{\mathrm{ME}}^2 & u_{1\mathrm{k}}^2+\frac{u_{\mathrm{Fl}}^2}{4}+\frac{3\cdot u_{\mathrm{ME}}^2}{2} \\ u_{1\mathrm{k}}^2 & u_{1\mathrm{k}}^2+\frac{u_{\mathrm{Fl}}^2}{4}+\frac{3\cdot u_{\mathrm{ME}}^2}{4} & u_{1\mathrm{k}}^2+\frac{u_{\mathrm{Fl}}^2}{4}+\frac{3\cdot u_{\mathrm{ME}}^2}{2} & u_{1\mathrm{k}}^2+\frac{u_{\mathrm{Fl}}^2}{2}+\frac{9\cdot u_{\mathrm{ME}}^2}{4} \end{pmatrix}$$

In der Praxis wird man natürlich numerisch rechnen (lassen).

Abschluss

Zusammenfassend lässt sich feststellen:

- Die Darstellung mittels Matrizen führt zu übersichtlichen Lösungen metrologischer Problemstellungen.
- Varianzen und Kovarianzen werde formal einheitlich behandelt und gemeinsam berechnet.
- Formale Matrixrechnungen sind in der Praxis entbehrlich, sie können durch numerische Berechnungen, z.B. mittels Tabellenkalkulation, ersetzt werden.
- Es ist wirklich so einfach, nur Mut!

Literatur

- Wikipedia, http://de.wikipedia.org
- DIN 1319-4
- EA-4/02
- GUM supplement 1
- T. Funck, E. Pesel and P. Warnecke: „Calibration of electronic voltage standards at the PTB, Beitrag zur Konferenz „Metrologie '99“.
- Dr.-Ing. W. Leonhard: „Statistische Analyse linearer Regelsysteme“, B.G. Teubner Verlag, Stuttgart; ISBN 3-519-02046-7, 1973

Diese Präsentation wurde unter Verwendung von ausschließlich freier Software mit *LibreOffice 3 Impress* erstellt.

Danke für Ihr Interesse

Torsten Funck