Behandlung korrelierter Eingangsgrößen nach GUM

Stephan Mieke
PTB, 8.40

Berechnung der Messunsicherheit – Empfehlungen für die Praxis
Berlin, 21. und 22. März 2011

Gliederung

1. Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?
2. Was fordert der GUM?
3. Was fordert das GUM Supplement 1?
4. Was gibt es für Beispiele?
5. Was haben wir gelernt?

0. Wie war das?

Kurze Zusammenfassung der Messunsicherheitsberechnung nach dem GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement):

1. Beschreibung der Messung
2. Mathematisches Modell der Messung
3. Informationen über die Eingangsgrößen

   (Typ A oder B, unabhängig oder abhängig)
4. Berechnung der Standardmessunsicherheiten
5. Kombinieren der Messunsicherheiten
6. Berechnen der erweiterten Messunsicherheit
7. Angabe des Ergebnisses

Nachdenken (1.-3.) -> Rechnen nach GUM-Regeln (4.-6.) -> Interpretieren (7.)

Gliederung

1. Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?
2. Was fordert der GUM?
3. Was fordert das GUM Supplement 1?
4. Was gibt es für Beispiele?
5. Was haben wir gelernt?

1. Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?

gleiches Zeichen, aber unterschiedliche Bedeutung! (Eingangs-/Zufallsgröße)

GUM **5.2 Korrelierte Eingangsgrößen**

5.2.1 Gleichungen (10) und ... sind nur dann gültig, wenn die Eingangsgrößen X_i unabhängig voneinander oder unkorreliert sind (die Zufallsgrößen, nicht die physikalischen Größen, die als Invarianten *[unveränderliche Größen]* angenommen werden, siehe 4.1.1, Anmerkung 1). Sind einige X_i signifikant korreliert, so müssen die Korrelationen berücksichtigt werden.

4.1.1, Anmerkung 1:
Zur ökonomischen Gestaltung der Schreibweise wird ... das gleiche Formelzeichen für die physikalische Größe und für die Zufallsgröße verwendet, ...
... es wird angenommen, daß die physikalische Größe selbst durch einen im wesentlichen eindeutigen Wert charakterisiert werden kann.

1. Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?

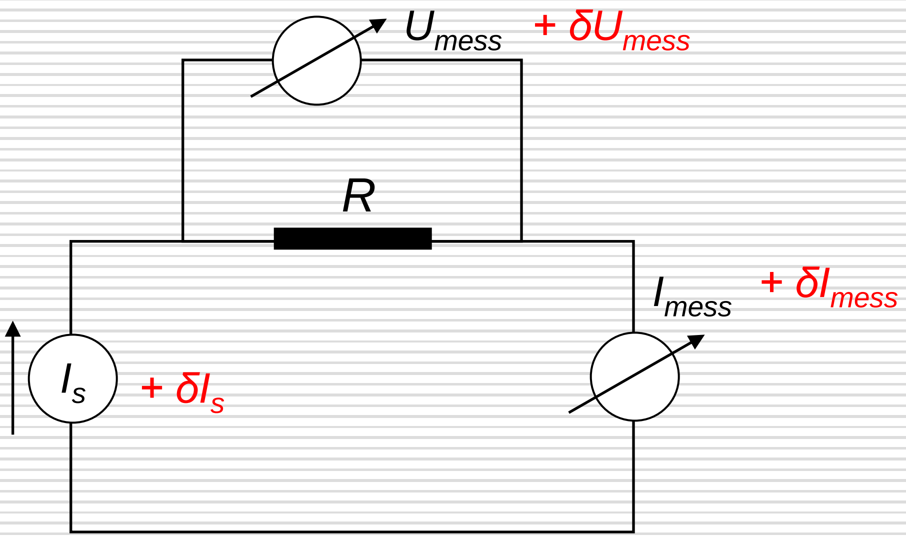
Typische Ursachen für die Korrelation der Zufallsgrößen zweier (oder mehrerer) Eingangsgrößen:

- benutzen desselben Messgeräts
- benutzen desselben Normals
- benutzen desselben Referenzwerts
- benutzen derselben Energiequelle

Weil sich die Schwankungen einer Quelle auf mehrere (Eingangs-) Größen auswirken, kommt es zur Korrelation.

1. Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?

Beispiel: Messen eines Widerstands



Wenn die Stromquelle nicht völlig stabil ist, stehen die bei der Spannungs- und Strommessung beobachteten Schwankungen wenigstens teilweise in Beziehung, d.h. sie sind korreliert.

Beispiel nach einer Idee von Wolfgang Schmid, EURAMET e.V.

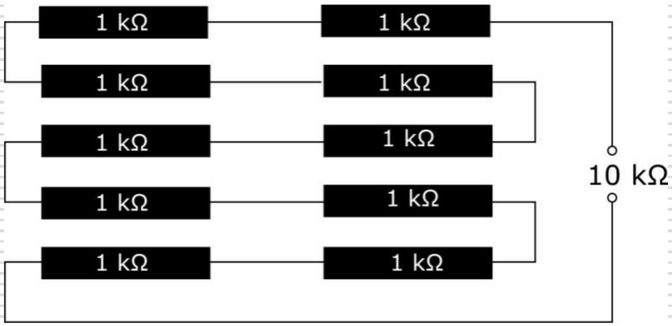
1. Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?

Beispiel: Bestimmung des Gesamtkohleverbrauchs

Foto: Modelleisenbahn Hamburg e.V. (MEHEV)

Wenn die Gesamtmenge des (Kohle-) Verbrauchs einer Feuerungsanlage aus Einzelmessungen mit stets **derselben Waage** bestimmt wird, sind die Einzelmessungen voneinander abhängig.

Beispiel: Widerstandsreihenschaltung



vgl. GUM , 5.2.2, Anmerkung 1

Wird eine Widerstandsreihenschaltung durch gleiche Einzelwiderstände realisiert, die alle mit **demselben Referenzwiderstand** kalibriert wurden, so wirkt sich die Unsicherheit des Referenzwiderstands auf alle Einzelwiderstände und somit auch auf den Gesamtwiderstand aus.

Gliederung

1. Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?
2. Was fordert der GUM?
3. Was fordert das GUM Supplement 1?
4. Was gibt es für Beispiele?
5. Was haben wir gelernt?

2. Was fordert der GUM?

Mathematisches Modell: $Y = f\,(X_i)$

GUM 5.2.2 … kombinierte Varianz (GUM, Gl. 13):
(Quadrat der kombinierten Standardunsicherheit)

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)}_{\text{unkorrelierter Fall}} + \underbrace{2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i,x_j)}_{\text{Mischterme mit Kovarianzen}}$$

wobei
x_i und x_j die Schätzwerte der Größen X_i und X_j sind, z.B. der Mittelwert aus wiederholten Messungen oder Literaturwerte
und
$u(x_i,x_j) = u(x_j,x_i)$, d.h. die Abhängigkeiten sind „symmetrisch".

2. Was fordert der GUM?

Die Kovarianz berechnet sich nach (GUM, Gl. 17)

$$s(\bar{q},\bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r})$$

mit q_k und r_k einzelne Messwerte der Größen Q und R,
$\bar{q}$ und $\bar{r}$ arithmetische Mittelwerte der Größen Q und R.

somit für die Größen X_i und X_j:

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (x_{i,k} - \bar{x}_i)(x_{j,k} - \bar{x}_j)$$

mit den n einzelnen Messwerten $x_{i,k}$ und $x_{j,k}$ der zwei o.g. Größen.

Bei unabhängigen Zufallsgrößen haben Kovarianzen für $i \neq j$ Werte gleich oder nahe Null.

2. Was fordert der GUM?

Der Grad der Korrelation von x_i und x_j wird durch den Korrelations-koeffizienten charakterisiert:

$$r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad \text{wobei} \quad -1 \leq r(x_i, x_j) \leq +1$$

eingesetzt (in GUM, Gl. 13):

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)$$

mit den Empfindlichkeitskoeffizienten $c_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}; c_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$

2. Was fordert der GUM?

Im Sonderfall, dass zwei oder mehr Zufallsgrößen mit $r = +1$ korreliert sind, wie beispielsweise bei Verwendung desselben Messgerätes oder Normals, ergibt sich aus

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j)$$

$$\Rightarrow \quad u_c^2(y) = \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\cdot u(x_i)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot u(x_i)\right)^2 \qquad \text{für } r = +1$$

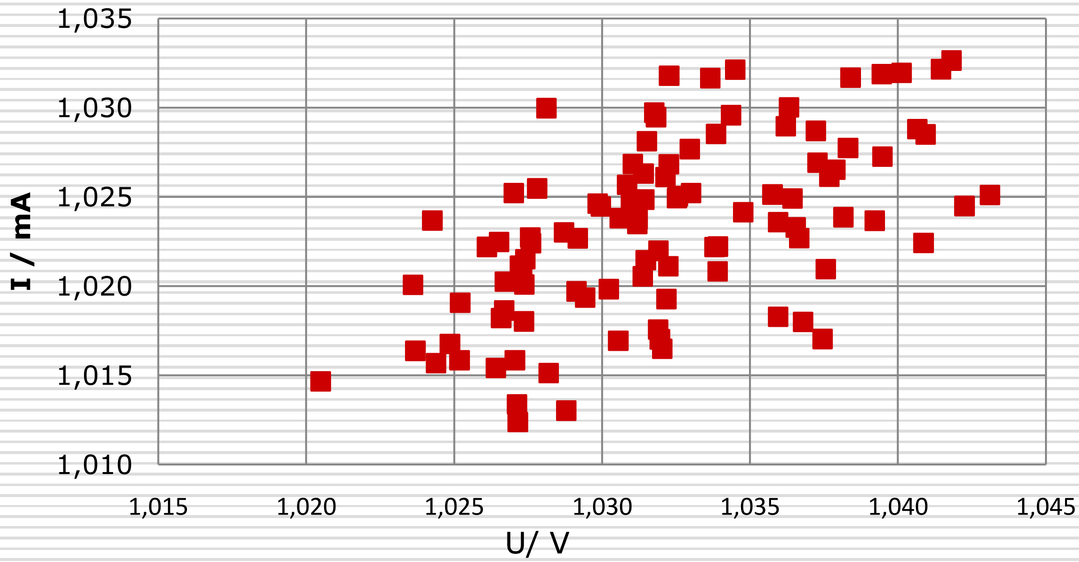
bzw.

$$\boxed{u_c(y) = \left|\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\cdot u(x_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot u(x_i)\right| \qquad \text{für } r = +1}$$

2. Was fordert der GUM?

Wie rechnet man $r(x_i, x_j)$ aus?

Der Korrelationskoeffizient wir aus den 2 Messreihen der Größen X_i und X_j errechnet, beispielsweise mit der Excel-Funktion KORREL(Messreihe 1;Messreihe2).



Beispiel:

$$X_i = U$$

$$X_j = I$$

$$\Rightarrow \quad r(U_i, I_j) = 0{,}58$$

2. Was fordert der GUM?

Andere Methoden der Bestimmung:

- Kovarianzen lassen sich auch experimentell ermitteln, z.B. durch Beobachten der zufälligen Schwankungen bei Variation von Umgebungsbedingungen,
- Schätzen der Korrelation auf Grund vorhandener Kenntnisse und Erfahrungen.

2. Was fordert der GUM?

Welche Alternativen gibt es zum Rechnen mit Korrelationen?

- man kann versuchen, den Einfluss zu eliminieren durch ein anderes Modell der Messung, indem die Korrelation durch eine eigene zusätzliche Eingangsgröße beschrieben wird; dieses ist beispielsweise möglich, wenn der Temperatureinfluss auf mehrere Eingangsgrößen berechenbar ist, siehe GUM F.1.2.4.

Gliederung

1. Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?
2. Was fordert der GUM?
3. Was fordert das GUM Supplement 1?
4. Was gibt es für Beispiele?
5. Was haben wir gelernt?

3. Was fordert das GUM Supplement 1?

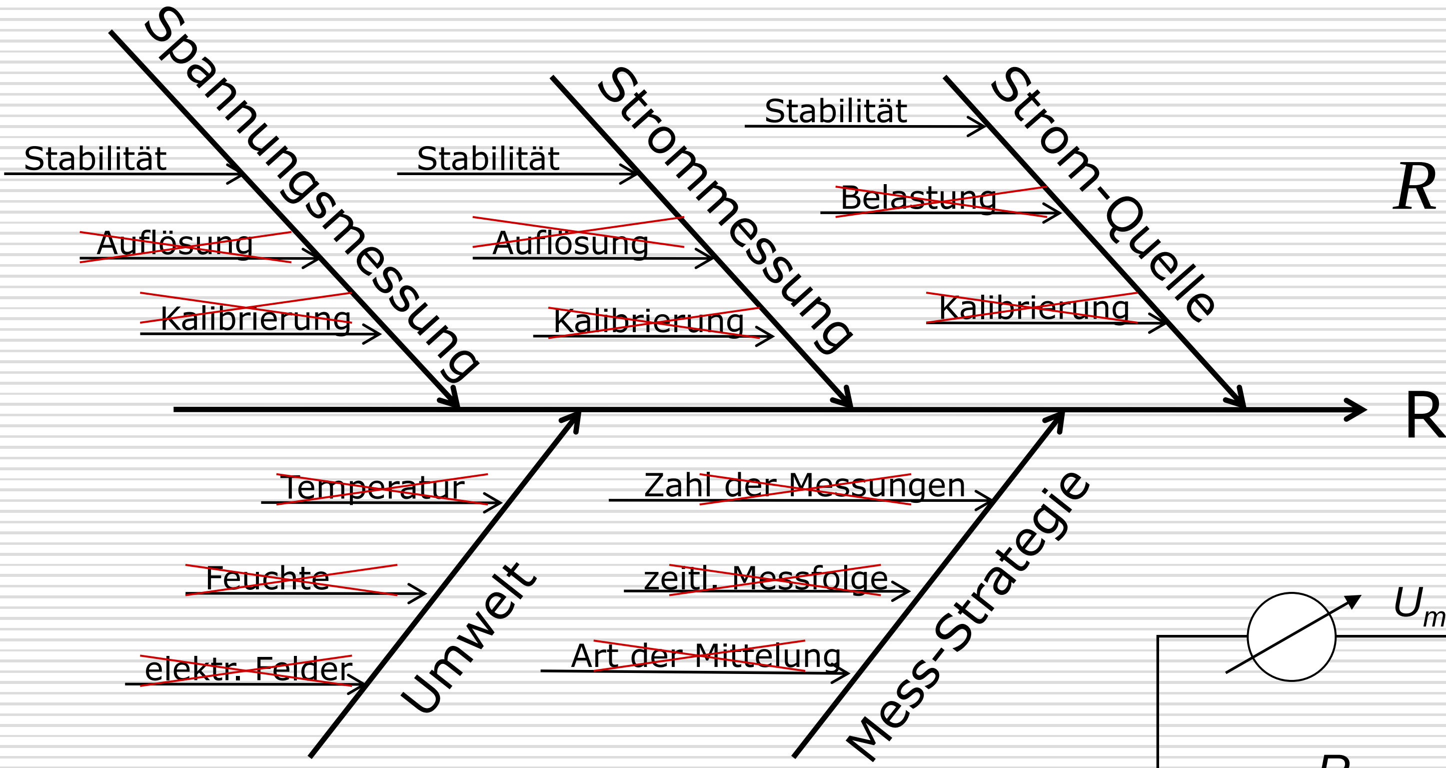
3.10
Kovarianz
Merkmal eines Paares von Zufallsvariablen, welches für zwei kontinuierliche Zufallsvariablen X_1 und X_2 , die durch eine gemeinsame (bivariate) Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g_x(\xi)$ gekennzeichnet wird, …

6.4.8.4 ANMERKUNG 2
Die einzigen gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, welche explizit in diesem Supplement betrachtet werden, sind die multivariaten Gauß-Verteilungen, also Verteilungen, welche im allgemeinen in der Praxis verwendet werden, …

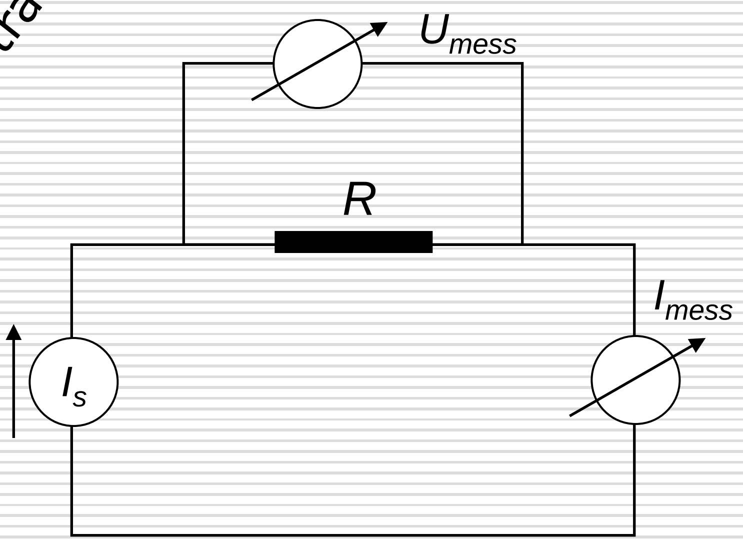
Gliederung

1. Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?
2. Was fordert der GUM?
3. Was fordert das GUM Supplement 1?
4. Was gibt es für Beispiele?
5. Was haben wir gelernt?

4. Was gibt es für Beispiele? Messen eines Widerstands

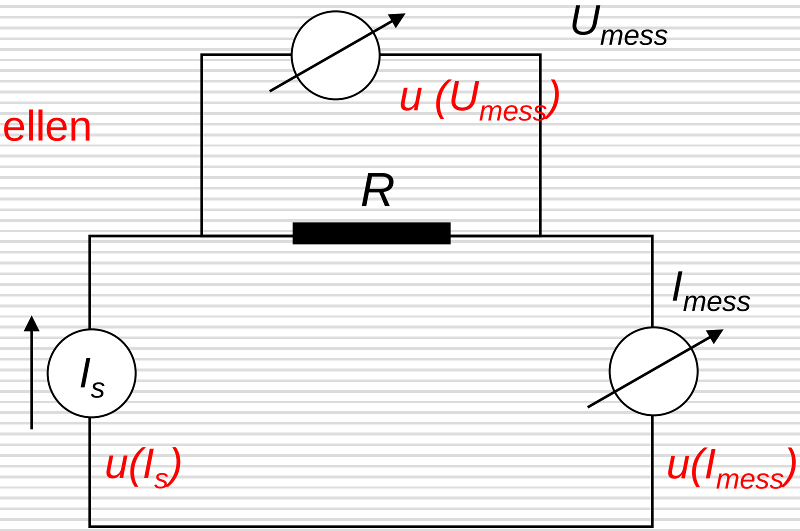


$$R = \frac{U}{I}$$



4. Was gibt es für Beispiele? Messen eines Widerstands

Unsicherheitsquellen



Auswertung:

Mittelwert aller Strom- und Spannungswerte, dann Quotientenbildung:

$$R = \frac{\overline{U_{mess}}}{\overline{I_{mess}}}$$

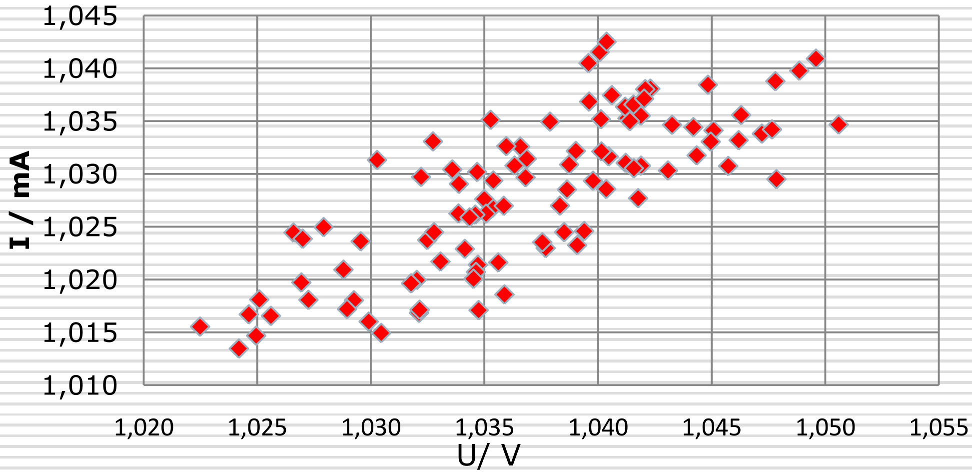
$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)$$

$$u_c^2(R) = (c_U \cdot u(\overline{U_{mess}}))^2 + (c_I \cdot u(\overline{I_{mess}}))^2 + 2 \cdot c_U \cdot u(\overline{U_{mess}}) \cdot c_I \cdot u(\overline{I_{mess}}) \cdot r(U_{mess}, I_{mess})$$

mit den Empfindlichkeitskoeffizienten:

$$c_U = \frac{\partial R}{\partial U_{mess}} = \frac{1}{I_{mess}} \qquad c_I = \frac{\partial R}{\partial I_{mess}} = -\frac{U_{mess}}{I_{mess}^2}$$

4. Was gibt es für Beispiele? Messen eines Widerstands



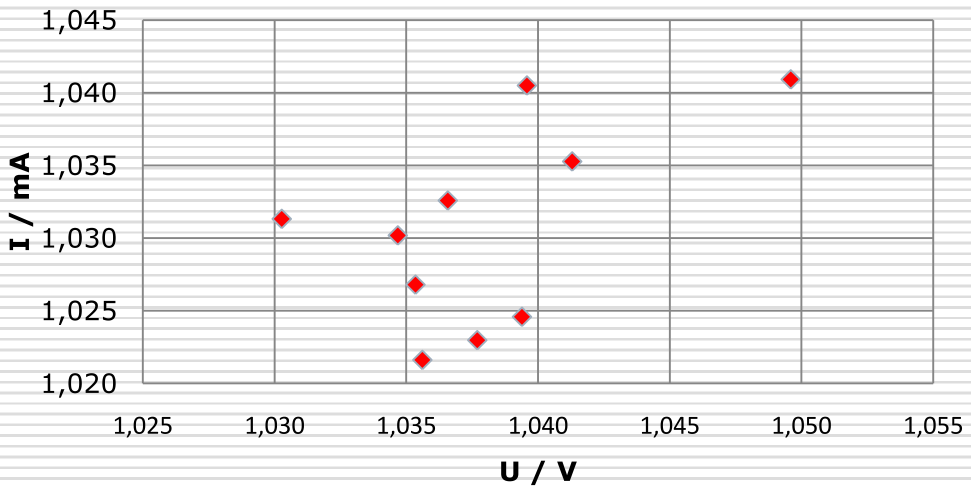
n = 100

r = 0,78

R = 1,00852 kΩ

u (R) = 0,00045 kΩ [mit Korr.]

u (R) = 0,00095 kΩ [ohne Korr.]



n = 10

r = 0,54

R = 1,00711 kΩ

u (R) = 0,00183 kΩ [mit Korr.]

u (R) = 0,00263 kΩ [ohne Korr.]

4. Was gibt es für Beispiele? Wiederholte Wägungen


Foto: Modelleisenbahn Hamburg e.V. (MEHEV)

Wenn die Gesamtmenge des (Kohle-) Verbrauchs einer Feuerungsanlage aus Einzelmessungen mit stets **derselben Waage** bestimmt wird, sind die Einzelmessungen miteinander korreliert.

Masse der Kohle je LKW: 25,0 t,
geeichte Fahrzeugwaage (Eichfehlergrenze: 1 %),
Anzahl der Wägungen im Jahr: 5000.

Da ein geeichtes Messgerät benutzt wird, ist von einer rechteckigen Wahrscheinlichkeitsverteilung auszugehen, d.h. $u(x) = a / \sqrt{3}$, mit *a* als halber absoluten Spanne.

4. Was gibt es für Beispiele? Wiederholte Wägungen

<u>Daraus ergibt sich:</u>

Masse der Kohle je Fahrzeug: 25,0 t, Anzahl der Wägungen pro Jahr: 5000

$\Rightarrow$ Gesamtmasse: 125000 t

Eichfehlergrenze je Wägung: 0,250 t (1%)

Standardunsicherheit der Einzelwägung $u(m_i)$: 0,144 t (0,577 %)

berechnete kombinierte Standardunsicherheit $u_c(m_{ges})$ der Gesamtmasse m_{ges}

bei Berücksichtigung der Korrelation: 721,7 t (0,577 %)

ohne Berücksichtigung der Korrelation: 10,2 t (0,008 %)

mit Korrelation: $$u_c(y) = \left| \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot u(x_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot u(x_i) \right|$$ für $r = +1$

ohne Korrelation: $$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \cdot u^2(x_i)}$$ für $r = 0$

Gliederung

1. Was sind Korrelationen im Sinne des GUM?
2. Was fordert der GUM?
3. Was fordert das GUM Supplement 1?
4. Was gibt es für Beispiele?
5. Was haben wir gelernt?

5. Was haben wir gelernt?

- der Ausdruck „Korrelation" bezieht sich auf die Abhängigkeit der Zufallsgrößen nicht auf die Messgrößen,
- Ursache sind unbekannten Schwankungen einer Quelle (Messgerät, Umwelt, …) wirken auf Eingangsgrößen,
- Korrelationen der Zufallsgrößen treten z.B. auf bei Verwendung desselben Messgerätes, Normals oder Referenzwertes,
- aus gemessenen Werten kann der Korrelationskoeffizient r bestimmt werden und die Messunsicherheit relativ einfach berechnet werden,
- der Grad der Korrelation muss gegebenenfalls geschätzt oder experimentell ermittelt werden.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Gibt`s noch Fragen?