Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie nach Bayes und Laplace in der Fertigungsmesstechnik

Michael Krystek

Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig

Kolloquium der Abt. Fertigungsmesstechnik,
Braunschweig, 4.2.2008

Inhalt

Einleitung

Eine quantitative und rückführbare Messtechnik ist eine wesentliche Grundlage einer zuverlässigen und stabilen Produktionstechnik, weil sie die Qualität der hergestellten Werkstücke unmittelbar beeinflusst.

Um zu prüfen, ob ein Werkstück innerhalb der Spezifikationsgrenzen liegt, die vom Konstrukteur auf der technischen Zeichnung angegeben worden sind, und damit auch Entscheidungen über die Annahme oder Ablehnung von Produkten zu ermöglichen, muss die Messunsicherheit berücksichtigt werden.

Einleitung

Die Fertigungsmesstechnik ist mehr oder weniger synonym zur Längenmessung, oder sie beruht zumindest auf dieser.

Die Längenmessung hat eine operationale Definition, denn sie bedeutet die Rückführung des Messergebnisses auf die SI-Einheit der Länge, das Meter, durch eine ununterbrochene Kette von Vergleichen mit angegebener Unsicherheit.

Demnach spielt die Messunsicherheit eine wesentliche Rolle in der Fertigungsmesstechnik.

Einleitung

Die Ermittlung der Messunsicherheit erfolgt gemäß internationalen Vereinbarungen heute nach dem Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM).

Der GUM basiert hauptsächlich auf der Wahrscheinlichkeitstheorie nach Bayes und Laplace, obwohl dies aus diesem Dokument selbst nicht klar hervorgeht.

Die Einführung des GUM wurde notwendig, um bestimmte Probleme, wie z. B. die Behandlung systematischer Abweichungen, konsistent behandeln zu können. Mit der früheren Fehlerrechnung war dies nicht möglich.

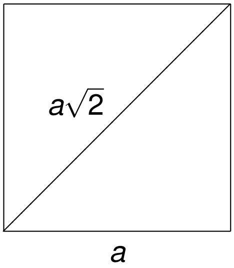
Kommensurabilität von Längen

Um eine Länge zu messen, muss sie mit einer bekannten Länge verglichen werden. Dieser Vergleich erfordert allerdings, dass ein Bruchteil oder ein Vielfaches der bekannten Länge genau in der zu messenden Länge aufgeht.

In diesem Fall sagt man, dass die Längen kommensurabel sind, anderenfalls dass sie inkommensurabel sind.

Demnach ist es eine grundlegende Forderung für die Längenmesstechnik, dass die Längeneinheit und jede mögliche zu messenden Länge kommensurabel sind.

Kommensurabilität von Längen



Die Längeneinheit kann nicht gleichzeitig mit der Seite und der Diagonale eines Quadrats kommensurabel sein, denn $\sqrt{2}$ ist irrational.

Selbst unter idealen Bedingungen sind wir nicht in der Lage, die Seite und die Diagonale eines Quadrats genau zu messen.

Kommensurabilität von Längen

Wahrscheinlich-
keitstheorie
in der Fertigungs-
messtechnik

M. Krystek

Da die Längeneinheit nicht mit jeder möglichen Länge kommensurabel sein kann, sind wir – selbst unter idealen Bedingungen – nicht in der Lage, Längen genau zu messen.

Jede gemessene Länge kann nur ein rationales Vielfaches der Längeneinheit sein.

Selbst wenn die Länge die wir messen tatsächlich kommensurabel mit der Längeneinheit ist, könnten wir es nicht wissen.

Diese Tatsache bedeutet, dass eine immanente Unsicherheit in der Längenmessung vorhanden ist, die weder durch die Unvollkommenheit der Messung noch durch die Unvollkommenheit des zu messenden Gegenstands verursacht wird!

Kommensurabilität von Längen

Der Hinweis auf die Existenz einer immanenten Unsicherheit soll demonstrieren, dass die Unsicherheit im Geiste der Wahrscheinlichkeitstheorie von Bayes und Laplace ausschließlich mit dem Mangel an Kenntnissen zusammenhängt und nicht mit der Unvollkommenheit des Messobjekts oder der Messung.

Da jede reelle Zahl beliebig genau durch rationale Zahlen approximiert werden kann, hat die immanenten Unsicherheit keine Konsequenz für die Praxis, denn wir können sie stets beliebig klein machen.

Information und Wahrscheinlichkeit

- Vor jeder Messung besitzen wir bereits gewisse Vorkenntnisse.
- Unsere Vorkenntnisse über den Messwert sind mehr oder weniger vage.
- Wir messen, um unsere Kenntnis über den Messwert zu vergrößern, d. h. um weitere Informationen zu erhalten.
- Da jede Messung mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist, besitzen wir auch nach der Messung keine vollständige Information über den Messwert.
- Durch wiederholte Messungen können wir unsere Kenntnis über den Messwert immer weiter vergrößern und unsere Unsicherheit weiter verringern.

Information und Wahrscheinlichkeit

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie nach Bayes und Laplace ergibt sich:

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

> *Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (probability density function, PDF) ist die mathematische Darstellung der Kenntnis, die wir bezüglich des Wertes der Messgröße haben.*

Alle interessierenden Werte der Messgröße lassen sich unmittelbar aus ihrer PDF erhalten.

Die PDF hat nichts mit der Häufigkeitsverteilung der Messwerte zu tun!

Bayes'sches Theorem (T. Bayes, Phil. Trans. **53** (1763), 376-398)

Das Bayes'sche Theorem lautet:

$$p(X|y_1,\ldots,y_n) = C\,p(y_1,\ldots,y_n|X)p(X),$$

wobei $p(X|y_1,\ldots,y_n)$ die Posterior-PDF der Größe X ist, nachdem die Werte $y_1,\ldots,y_n$ bekannt sind, $p(y_1,\ldots,y_n|X)$ die Likelihood die Werte $y_1,\ldots,y_n$ zu erhalten, wenn die Größe X bekannt ist, und $p(X)$ die Prior-PDF der Größe X, bevor die Werte $y_1,\ldots,y_n$ bekannt sind.
C ist eine Normierungskonstante.

Information und Wahrscheinlichkeit

Nach dem GUM sollen alle Kenntnisse über die Messgröße bei der Auswertung der Messergebnisse berücksichtigt werden. Diese Forderung stammt aus dem Bayes'schen Theorem, bei dem unsere Vorkenntnisse durch die Prior-PDF berücksichtigt werden.

Die zusätzlichen durch die Messung gewonnenen Kenntnisse werden durch die Likelihood berücksichtigt.

Die Verknüpfung der Vorkenntnisse mit den Messergebnissen wird durch das Bayes'sche Theorem erreicht. Die Posterior-PDF repräsentiert die Kenntnisse nach der Messung.

Information und Wahrscheinlichkeit

Wie erhalten wir die Prior-PDF, wenn wir bestimmte Vorkenntnisse besitzen?

Das Prinzip der maximalen Entropie (PME) (E. T. JAYNES, 1957)

*Die PDF $p(X)$ einer Größe X kann man dadurch erhalten, dass man die Informationsentropie (*C. E. SHANNON*, 1948)*

$$S = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(X) \log p(X) \, \mathrm{d}X$$

unter den Nebenbedingungen, die durch die bekannten Informationen gegebenen sind, maximiert.

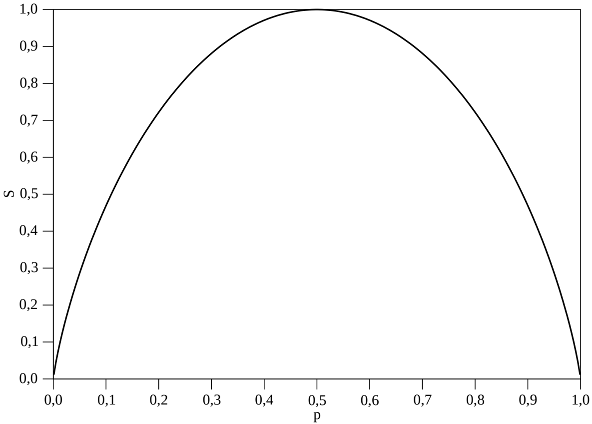
Information und Wahrscheinlichkeit

Die Informationsentropie ist ein Maß für die Unvorhersagbarkeit eines Ereignisses. Ein unerwartetes Ereignis hat eine große Informationsentropie.

Für ein binäres Experiment, das nur zwei verschiedene Ergebnisse haben kann (wie z. B. das Werfen einer Münze), wobei das eine Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit p und das andere mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ auftreten kann, erhält man die Informationsentropie

$$S = -p \log p - (1-p) \log(1-p).$$

Information und Wahrscheinlichkeit



S: Informationsentropie
p: Wahrscheinlichkeit

Beispiel für die Anwendung des PME: Gleichverteilung

Im Fall vollständiger Unkenntnis ist die einzige Nebenbedingung die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(X)\,\mathrm{d}X = 1.$$

Wenn zusätzlich $x_{\mathrm{min}} \leq X \leq x_{\mathrm{max}}$ gilt, dann ergibt das PME eine Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

$$p(X) = \frac{\mathrm{H}(X - x_{\mathrm{min}})\mathrm{H}(x_{\mathrm{max}} - X)}{x_{\mathrm{max}} - x_{\mathrm{min}}}.$$

$\mathrm{H}(\cdot)$ bedeutet die Heaviside'sche Sprungfunktion.

Information und Wahrscheinlichkeit

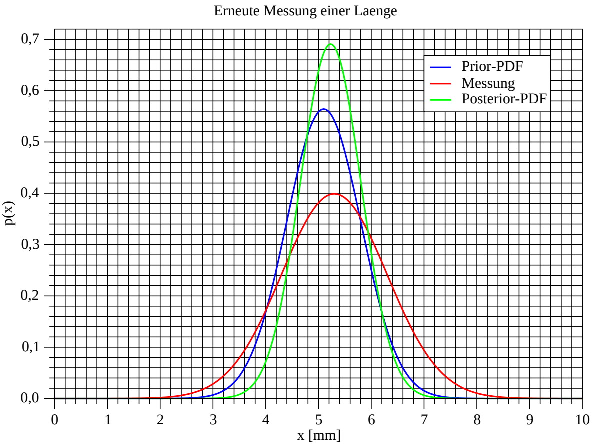
Wenn wir von einer früheren Messung den Messwert und die ihm beigeordnete Standardunsicherheit kennen, dann sagt uns das PME, dass wir diesem Messergebnis eine Normalverteilung zuordnen können.

Eine derartige Situation ist häufig gegeben, wenn ein Messergebnis durch andere Personen mit anderen Messinstrumenten unter anderen Bedingungen erhalten worden ist.

Ein typisches Beispiel ist die Verwendung von Ergebnissen, welche auf einem Kalibrierschein angegeben sind.

Wenn dasselbe Messobjekt erneut gemessen wird, dann können die Ergebnisse der vorgehenden Messungen dazu verwendet werden, die Prior-PDF festzulegen.

Information und Wahrscheinlichkeit



Eine typische Anwendung des Bayes'schen Theorems

Information und Wahrscheinlichkeit

Wird eine Messung mehrfach durchgeführt, dann folgt aus dem Bayes'schen Theorem für den Mittelwert und die Unsicherheit des Mittelwerts

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{u_k^2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k^2}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\overline{u}^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k^2}.$$

Für gleiche Unsicherheiten $u_k = u$ $(k = 1, \ldots, n)$ folgen daraus die aus dem GUM bekannten Formeln

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{und} \quad \overline{u} = \frac{u}{\sqrt{n}}.$$

Information und Wahrscheinlichkeit

In der Produktion von Massenartikeln (z. B. Schrauben, Nägel, usw.) werden die Einzelteile nicht geprüft, sondern nur der Prozess überwacht.

Hier ermöglicht das Bayes'sche Theorem eine Aussage über die Qualität der einzelnen Teile, ohne dass diese gemessen werden müssen.

Ohne Messwerte ist die Posterior-PDF gleich der Prior-PDF. Die Prior-PDF ist aber durch die Kenntnisse über den Produktionsprozess gegeben.

Erwartungswert und Unsicherheit

Eine PDF lässt sich durch zwei Parameter charakterisieren

- Wenn X die Messgröße bezeichnet und $p(X)$ die zugehörige PDF, dann ist der Erwartungswert definiert als

$$x = \mathrm{E}\,X = \int_{-\infty}^{+\infty} X\, p(X)\, \mathrm{d}X.$$

  Der Erwartungswert ist nach dem GUM der beste Schätzwert für die Messgröße!

- Die Streuung der PDF um den Erwartungswert ist durch die Varianz gegeben

$$\mathrm{Var}\,X = \mathrm{E}(X - x)^2 = \mathrm{E}\,X^2 - (\mathrm{E}\,X)^2.$$

Erwartungswert und Unsicherheit

Streuung (C. F. Gauss, 1809)

Die Streuung der PDF um einen beliebigen Wert ξ ist gegeben durch

$$\mathrm{E}(X-\xi)^2 = \mathrm{Var}\,X + (x-\xi)^2.$$

Unsicherheit

Die Unsicherheit, die einem beliebigen Wert ξ beigeordnet ist, ist als die Quadratwurzel der Streuung definiert

$$u(\xi) = \sqrt{\mathrm{E}(X-\xi)^2} = \sqrt{\mathrm{Var}\,X + (x-\xi)^2}.$$

Erwartungswert und Unsicherheit

Die Unsicherheit

$$u(\xi) = \sqrt{\operatorname{Var} X + (x - \xi)^2}.$$

hat für $\xi = x$, d. h. für den Erwartungswert, ein Minimum!

Standardunsicherheit

Die dem Erwartungswert beigeordnete Unsicherheit ist die Standardunsicherheit

$$u(x) = \sqrt{\operatorname{Var} X}.$$

Dies ist die im GUM festgelegte Definition der Unsicherheit!

Erwartungswert und Unsicherheit

Ein vollständiges Messergebnis einer Messgröße X ist durch ihre Posterior-PDF gegeben!

Es ist jedoch mindestens erforderlich, den Erwartungswert $x = \mathrm{E}\,X$ und die ihm beigeordnete Standardunsicherheit $u(x)$ anzugeben.

Korrelationen

Hat man mehrere Messgrößen X_i $(i = 1, \dots, n)$ vorliegen, dann kann man ihre Kovarianzen

$$\operatorname{Cov} X_i X_j = \mathrm{E}[(X_i - x_i)(X_j - x_j)] = \mathrm{E}\, X_i X_j - (\mathrm{E}\, X_i)(\mathrm{E}\, X_j)$$

berechnen.

Die Kovarianz zweier Größen ist ein Maß für ihre Korrelation, d. h. für ihre gegenseitige Abhängigkeit.

Sind zwei Größen unabhängig, dann ist ihre Kovarianz gleich Null. Das Umgekehrte gilt allerdings nicht notwendigerweise, d. h. auch für abhängige Größen kann die Kovarianz gleich Null sein.

Korrelationen

In den folgenden Fällen sind die Werte einer Messgröße voneinander abhängig:

- Die Werte werden mit dem gleichen Messgerät gemessen.
- Die Werte werden mit unterschiedlichen Messgeräten gemessen, aber es wird das gleiche Normal zur Kalibrierung verwendet.
- Eine Reihe von Messwerten wird gefiltert.
- Die Werte werden unter Verwendung derselben Information berechnet.

Korrelationen

Als Beispiel sei der Fall einer systematischen Messabweichung X_{syst} betrachtet:

$$Y_i = X_i + X_{\text{syst}}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Man erhält für unabhängige Größen X_i $(i = 1, \ldots, n)$

$$u(y_i) = \sqrt{u^2(x_i) + u^2(x_{\text{syst}})}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

und

$$\operatorname{Cov} Y_i Y_j = u^2(x_{\text{syst}}), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Die systematische Messabweichung führt auch dann zu einer Korrelation der Größen Y_i $(i = 1, \ldots, n)$, wenn sie korrigiert wird, d. h. wenn $\operatorname{E} X_{\text{syst}} = 0$ ist!

Korrelationen

Für die Unsicherheit des Mittelwerts

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

erhält man

$$u(\overline{y}) = \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} u^2(x_i) + u^2(x_{\text{syst}})}.$$

Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} u(\overline{y}) = u(x_{\text{syst}}),$$

d. h. für große n wird die Unsicherheit des Mittelwerts durch die Unsicherheit der systematischen Abweichung dominiert!

Konfidenzbereiche

Nachdem wir den Erwartungswert und die ihm beigeordnete Standardunsicherheit erhalten haben, sind wir auch daran interessiert zu erfahren, welches Vertrauen wir zu unserem Ergebnis haben können.

Tatsächlich möchten wir wissen, wie wahrscheinlich es ist, den wahren Wert der Messgröße innerhalb eines gewissen Intervalls um den Erwartungswert zu finden.

Konfidenzbereiche

Das Vertrauensintervall $(\mathrm{E}\,X - U, \mathrm{E}\,X + U)$, enthält den wahren Wert mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit

$$\alpha = \Pr(\mathrm{E}\,X - U < X < \mathrm{E}\,X + U).$$

Der Wert α wird als Vertrauensniveau bezeichnet.

Für ein gegebenes Vertrauensniveau kann der Wert U aus der Gleichung

$$\alpha = \int_{\mathrm{E}\,X-U}^{\mathrm{E}\,X+U} p(X|\mathbf{y})\,\mathrm{d}X,$$

berechnet werden, wobei $p(X|\mathbf{y})$ die Posterior-PDF der Größe X ist.

Konfidenzbereiche

Der Wert U wird als erweiterte Unsicherheit bezeichnet, aber er ist keine Unsicherheit! Er legt nur die Grenzen des Vertrauensintervalls um den Erwartungswert fest.

Der Erweiterungsfaktor ist definiert durch

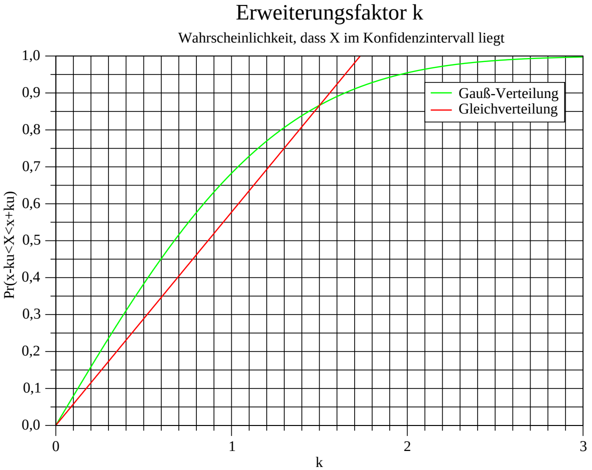
$$k = \frac{U}{u(x)}$$

und hängt sowohl von α, als auch von der Posterior-PDF ab.

Für eine Normalverteilung ergibt sich $\alpha = \operatorname{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$.

Für eine Rechteckverteilung ergibt sich $\alpha = \frac{k}{\sqrt{3}}$.

Konfidenzbereiche



x, *X*: Erwartungswert bzw. wahrer Wert

u: Standardunsicherheit

Verifikation und Entscheidungsregeln

In der Fertigungsmesstechnik bedeutet die Verifikation als Teil des Qualitätssicherungssystems, die Prüfung eines Werkstücks, um festzustellen, ob die vom Konstrukteur beabsichtigten Spezifikationen eingehalten worden sind.

Üblicherweise ist die Spezifikation eines Merkmalswertes durch den Nennwert und ein Toleranzintervall um diesen Wert herum gegeben.

Verifikation und Entscheidungsregeln

Angenommen, wir kennen aus der Prüfung eines Werkstücks den Messwert y eines Merkmals und die diesem Wert beigeordnete Standardunsicherheit $u(y)$.

Wir kennen auch die untere bzw. die obere Spezifikationsgrenze LSL und USL.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den wahren Wert Y des Merkmals innerhalb des Toleranzintervalls (LSL, USL) zu finden?

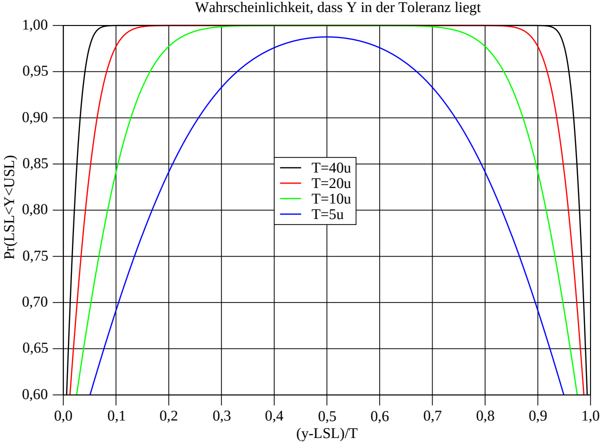
Verifikation und Entscheidungsregeln

Da wir den Messwert und die zugeordnete Unsicherheit kennen, folgt aus dem PME, dass wir unserem Messergebnis eine Normalverteilung als PDF zuordnen können.

Damit erhält man nach kurzer Rechnung:

$$\Pr(LSL \leq Y \leq USL) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{USL - y}{u(y)\sqrt{2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y - LSL}{u(y)\sqrt{2}}\right)\right].$$

Verifikation und Entscheidungsregeln



y, Y: Messwert bzw. wahrer Wert
u: Standardunsicherheit
$T = USL - LSL$: Toleranz
LSL, USL: untere bzw. obere Spezifikationsgrenze

Verifikation und Entscheidungsregeln

Angenommen, für die Toleranz $T = USL - LSL$ gelte $T = 20u$, dann ergibt sich aus dem Diagramm für

$$0,1 \leq \frac{y - LSL}{T} \leq 0,9$$

eine Wahrscheinlichkeit von mehr als 97,5% dafür, dass der Merkmalswert innerhalb der Toleranz liegt.

Die obere Bedingung lässt sich umformen zu

$$LSL + 2u \leq y \leq USL - 2u.$$

Entscheidungsregel

Fordert man, dass der Merkmalswert mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 97,5 % innerhalb der Toleranz liegen soll, dann muss der Messwert y im Intervall $(LSL+2u, USL-2u)$ liegen. Liegt er in diesem Intervall, dann ist das Werkstück in Ordnung.

Das Intervall $(LSL+2u, USL-2u)$ ist der Annahmebereich. Dieses Intervall ist links und rechts um $2u$ kleiner als die Toleranz.

Zusammenfassung

- Es wurde versucht, einen kurzen Überblick über die Philosophie zu geben, die hinter dem GUM steht.
- Der Zusammenhang zwischen vorhandener Information und der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wurde aufgezeigt und wie man letztere aus dem Prinzip der maximalen Entropie erhalten kann.
- Es wurde gezeigt, dass die durch die Anwendung des Bayes'schen Theorems erhaltene Posterior-PDF alle Kenntnisse über die Messgröße enthält.

Zusammenfassung

- Es wurde diskutiert, welchen Einfluss die Korrelation bei der Berechnung der Unsicherheit von Messwerten haben kann.
- Es wurde angedeutet, wie wichtige Werte, wie der Erwartungswert und die Unsicherheit, sowie das Vertrauensintervall aus der Posterior-PDF erhalten werden können.
- Schließlich wurden kurz die Verifikation und die Entscheidungsregeln diskutiert und wie diese mit dem Toleranzintervall und der Unsicherheit im Zusammenhang stehen.

On voit, . . . , que la théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul; elle fait apprécier avec exactitude ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte.

(Man sieht . . . , dass die Wahrscheinlichkeitstheorie im Grunde nur der der Berechnung unterworfene gesunde Menschenverstand ist; sie lehrt das mit Genauigkeit abschätzen, was ein gerader Verstand mit einer Art Instinkt fühlt, ohne dass er sich davon Rechenschaft geben kann.)

Pierre Simon de Laplace

Essai philosophique sur les Probabilités (1814)