

# Zur Schalleistung als Quellgröße

M. Schmelzer

Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB), Bundesallee 100, 38116 Braunschweig, Email: martin.schmelzer@ptb.de

## Einleitung

Das derzeit laufende EMRP-Projekt SIB56 [1] beabsichtigt, jeder Schallquelle eine charakterisierende Kenngröße zuzuweisen, und zwar diejenige Schalleistung, die in ein exaktes Freifeld abgestrahlt wird.

Üblicherweise sind reale Schallfelder keine exakten Freifelder, und so besteht sofort die Frage, ob eine gegebene Quelle dieselbe Schalleistung in ein reales Schallfeld emittiert wie in ein exaktes Freifeld. Hierin wird dazu an einem einfachen, ein-dimensionalen System ein Vergleich zwischen der abgestrahlten Schalleistung bei realen und bei Freifeld-Randbedingungen durchgeführt.

Aber auch im Fall eines (deutlichen) Unterschieds soll geprüft werden, unter welchen zusätzlichen Bedingungen die Schalleistung in ein exaktes Freifeld ein vernünftiger Schätzwert für die reale Schalleistung darstellt.

## Lösungen der Differentialgleichung

Die Wellengleichung soll mit den Standardlösungen nach d'Alembert und Bernoulli gelöst werden, z.B. [2]. Einerseits sind die vom EMRP-Projekt geforderten Freifeld-Randbedingungen anzusetzen. Für das reale Schallfeld schreibe schallharte Ränder vor. Dies ist letztlich ein Extremfall andersartiger Randbedingungen gegenüber dem Bezugfeld des EMRP-Projekts und wird darum hier als Maximalabschätzung verwendet. In beiden Fällen wird dem System eine Mediendämpfung hinzugefügt.

Die Verwendung der d'Alembert-Lösung im drei-dimensionalen Fall ist schwierig im Hinblick auf die exakte geometrische Beschreibung der Wellenfronten – insbesondere nach Reflexionen. Die ggf. spätere drei-dimensionale Untersuchung müsste also mit der Bernoulli-Lösung erfolgen. In dem Fall kann keine Punktquelle verwendet werden. Die Quelle muss also räumlich ausgedehnt sein und als Inhomogenität in der DGL stehen.

Hier wird das Problem auf eine Dimension reduziert und die Bernoulli-Lösung mit der benannten ausgedehnten Quelle mittels einer d'Alembert-Lösung mit Punktquelle in Form einer Schallfluss-Quelle validiert. Dabei ist ein Grenzübergang der Quellabmessungen durchzuführen.

Das System ist ein ein-dimensionales Medium der Länge  $l$ . Um korrekte physikalische Einheiten zu erhalten, wird eine Querschnittsfläche  $A$  vorgegeben. Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit beträgt  $c$ , die Massendichte  $\rho$ . Der frequenzabhängige Dämpfungskoeffizient  $\alpha$  kann z.B. mit Werten aus [3] berechnet werden. Die Quelle ist an der Stelle  $x_0$  lokalisiert und regt mit der Frequenz  $f$  und der Schallfluss-Amplitude  $\hat{Q}$  an.

## d'Alembert-Lösung

Die Differentialgleichung für das gesuchte Schnellepotential  $\Phi$  lautet in diesem Fall

$$\ddot{\Phi} + 2\alpha\dot{\Phi} = c^2\Phi'' \quad (1)$$

Man erhält linksseits  $\square$  wie rechtsseits  $\boxminus$  der Quellposition  $x_0$  je eine vor- und eine rücklaufende Welle:

$$\Phi_{\pm}(x, t) = e^{\pm\delta x} \left[ \hat{\Phi}_{c\pm} \cos A + \hat{\Phi}_{s\pm} \sin A \right] \Big|_{A=\omega t \pm kx} \quad (2)$$

mit  $\omega = 2\pi f$  und  $k = \bar{k} \cos(\gamma)$  und  $\delta = \bar{k} \sin(\gamma)$ , den Hilfsgrößen  $\bar{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{2\alpha}{\omega}\right)^2}$  und  $\tan(2\gamma) = \frac{2\alpha}{\omega}$  und den noch zu bestimmenden Amplituden  $\hat{\Phi}_{c\pm}$  und  $\hat{\Phi}_{s\pm}$ .

Man berechnet wie üblich Druck und Schnelle:

$$p(x, t) = \rho \frac{\partial}{\partial t} [\Phi_+(x, t) + \Phi_-(x, t)] \quad (3)$$

$$v(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_+(x, t) + \Phi_-(x, t)] \quad (4)$$

und formuliert mit den links- und rechtsseitigen Teillösungen die schallharten Randbedingungen:

$$v_{\square}(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad v_{\boxminus}(l, t) = 0 \quad (5)$$

und die Übergangsbedingungen an der Quellposition  $x_0$ :

$$A [v_{\boxminus}(x_0, t) - v_{\square}(x_0, t)] = \hat{Q} \cos(\omega t) \quad (6)$$

$$[p_{\boxminus}(x_0, t) - p_{\square}(x_0, t)] = 0. \quad (7)$$

Dann kann man die Gleichungen nach den Koeffizienten  $\hat{\Phi}_{c\pm}$  und  $\hat{\Phi}_{s\pm}$  auflösen und schließlich die ins System eingeleitete Leistung berechnen. Aus dem Mittelwert über eine Periode erhält man die effektive Leistung:

$$P_{hart}(x_0) = \frac{A\omega}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi/\omega} [v_{\boxminus} p_{\boxminus} - v_{\square} p_{\square}] \Big|_{(x_0, t)} dt. \quad (8)$$

In entsprechender Weise erhält man für die Freifeld-Randbedingungen die eingeleitete effektive Leistung:

$$P_{frei} = \frac{\hat{Q}^2}{4A} \frac{\rho\omega}{k} \frac{k^2}{k^2 + \delta^2} \quad (9)$$

## Bernoulli-Lösung

Die Differentialgleichung beinhaltet in diesem Fall einen Anregungsterm der räumlich ausgedehnten Quelle:

$$\ddot{\Phi} + 2\alpha\dot{\Phi} = c^2\Phi'' + \Psi \quad (10)$$

mit einer harmonischen Anregung:

$$\Psi(x, t) = g(x) \cos(\omega t) + h(x) \sin(\omega t) \quad (11)$$

mit zwei Ortsfunktionen  $g$  und  $h$ . Die Quelle befindet sich im Bereich  $x_0 - \Delta x \leq x \leq x_0 + \Delta x$ . In diesem Bereich sollen die Ortsfunktionen  $g$  und  $h$  zur Vereinfachung die konstanten Werte  $\bar{g}_0$  bzw.  $\bar{h}_0$  annehmen. Außerhalb dieses Bereichs seien  $g$  und  $h$  Null.

Für schallharte Randbedingungen erhält man die bekannten Eigenwerte  $k_n = \frac{n\pi}{l}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , und die ebenfalls bekannten Eigenfunktionen  $R_n(x) = \cos(k_n x)$ .

Nach diesen Eigenfunktionen entwickle die Ortsfunktionen  $g$  und  $h$  (vgl. Fourier-Reihe, gezeigt für  $g$ ):

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n R_n(x) \quad (12)$$

mit die Koeffizienten

$$g_n = \frac{\int_{x=0}^l g(x) R_n(x) dx}{\int_{x=0}^l R_n^2(x) dx}. \quad (13)$$

Ein Vergleich der Koeffizienten der einzelnen Funktionen  $R_n(x)$  liefert dann die Lösung  $\Phi(x, t)$ .

Die eingeleitete Leistung wird im Vorausblick auf die drei-dimensionale Anwendung mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß berechnet. Anschließend wird über eine Periode gemittelt, um den Effektivwert zu erhalten:

$$P_{hart} = \frac{A\omega}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi/\omega} \int_{x=x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} p(x, t) \operatorname{div} v(x, t) dx dt \quad (14)$$

## Grenzübergang der Quellabmessungen

Für die Bernoulli-Lösung soll die Quellabmessung verkleinert werden, um den Vergleich mit der Punktquelle der d'Alembert-Lösung ausführen zu können. Im Grenzübergang bedeutet dies:  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Berechnet man die Terme für den Schalldruck  $p$ , die Schalleistung  $P$  und den Schallfluss  $Q$ , so findet man darin folgende Faktoren (gezeigt für  $g$ ):

$$\begin{aligned} p &: \bar{g}_0 \cdot \Delta x^1 \\ P &: \bar{g}_0 \cdot \Delta x^{1,5} \\ Q &: \bar{g}_0 \cdot \Delta x^2 \end{aligned}$$

Wenn die Quellabmessung  $\Delta x$  Null wird, kann man durch entsprechende Wahl von  $\bar{g}_0$  dafür sorgen, dass **eine** dieser drei Größen endlich bleibt. Soll z.B. die Schalleistung  $P$  endlich bleiben, dann wird der Schallfluss  $Q$  Null, während der Schalldruck  $p$  unendlich ansteigt.

Dieses Verhalten ist bei der d'Alembert-Lösung nicht anzutreffen. Die beiden Lösungsformen scheinen also im Grenzfall der Punktquelle nicht gleichwertig zu sein.

## Vergleich der Lösungen

Für das System wurden folgende Rechenaten zugrunde gelegt: Systemlänge  $l = 3$  m, Quellposition  $x_0 = 0,23$  m,

Quellabmessung  $\Delta x = 0,001$  m, Quellfrequenz  $f = 100$  Hz, Quellfluss  $\dot{Q} = A v_0$  mit  $v_0 = 5,0 \cdot 10^{-8}$  m/s und der beliebigen Querschnittsgröße  $A$ . Für die Dämpfung wird  $\alpha = 0,016824$  1/s eingesetzt, was man aus der Ausbreitungsdämpfung aus [3] berechnen kann.

Im ersten Schritt werden die Feldgrößen des Schalldrucks  $p$  und der Schallschnelle  $v$  der beiden Lösungen miteinander verglichen. Die ist in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt. Man erkennt, dass der stetige Verlauf des Schalldrucks  $p$  von beiden Lösungen gleich gut dargestellt werden kann. Bei der Schallschnelle  $v$  und ihrem quellbedingtem Sprung bei  $x_0$  sieht man in der Bernoulli-Lösung deutlich die typischen Approximationsprobleme einer Fourier-Reihe in Gleichung (12) bei einem Sprung.

Auch mit 100 Eigenmoden zur Darstellung der Lösung liefert die Bernoulli-Lösung noch deutliche Oszillationen in der Umgebung des Sprungs. Mit 10 oder 25 Eigenmoden ist der Funktionsverlauf merklich weniger steil.

Bei dieser Quellposition  $x_0$  speist die Quelle eine Leistung von  $L_P = -39,2$  dB ein.

Dieser Wert ist in Abbildung 3 als violettes Kreuz dargestellt. Hier hat eine Abstraktion stattgefunden: Abbildung 3 zeigt die eingeleitete effektive Schalleistung für alle möglichen Quellpositionen  $x_0$  – also auch für das vorige Beispiel von  $x_0 = 0,23$  m.

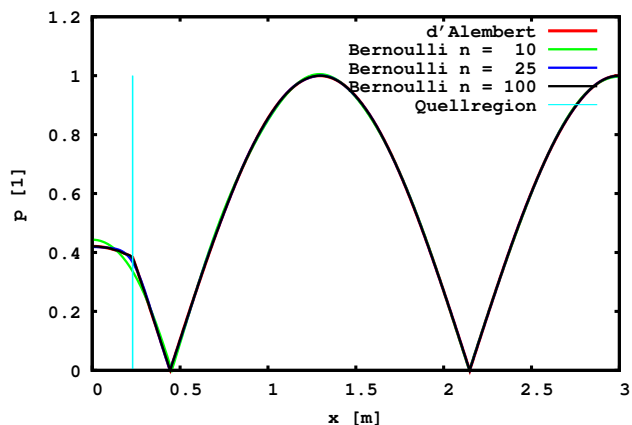
Man kann hier den Mittelwert über alle Quellpositionen berechnen. Dies wird über die physikalische Größe der Leistung  $P$  und nicht über die logarithmische Größe des Leistungspegels  $L_P$  durchgeführt:

$$P_{mean} = \frac{1}{l} \int_{x_0=0}^l P_{hart} dx_0 \quad (15)$$

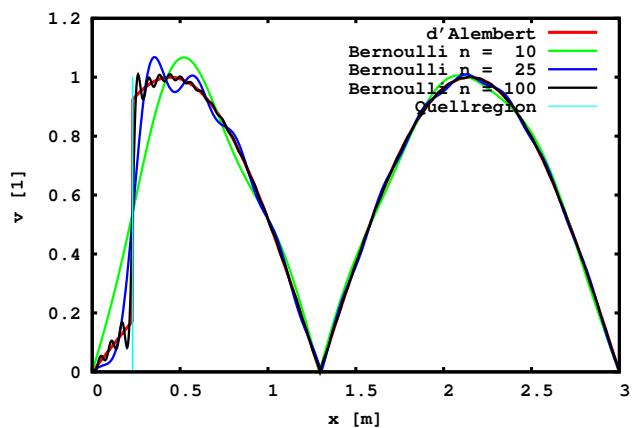
Das Ergebnis kann man dann logarithmieren und erhält in diesem Fall einen Wert von  $L_{P_{mean}} = -41,2$  dB.

Dieser Wert findet sich in Abbildung 4 als schwarzes Kreuz wieder – der Fall der Anregungsfrequenz  $f = 100$  Hz. In Abbildung 4 wurde ein weiterer Abstraktionsschritt ausgeführt: Es wurde die Schalleistung für alle dargestellten Frequenzen berechnet und jeweils der Mittelwert gemäß (15) über alle Quellpositionen berechnet. Dies zeigt die hellblaue Kurve. Zusätzlich wurde diese Kurve über Terz- und über Oktav-Bänder (rote und hellgrüne Kurven) summiert, weil dies üblicherweise so gemessen wird. Außerdem wurden die Schalleistungen ins Freifeld berechnet, ebenso summiert und mit dargestellt (dunkelblaue, orange und dunkelgrüne Kurven).

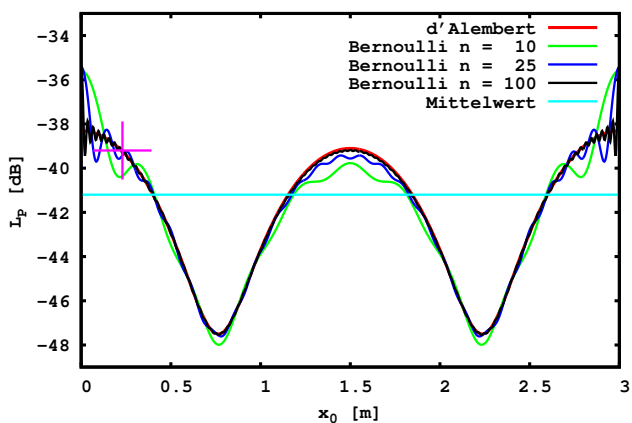
Man erkennt keine Übereinstimmung zwischen der Freifeldschalleistung (dunkelblau) und der realen Schalleistung (hellblau) bei tonaler Anregung. Es zeigt sich deutlich die Modenstruktur des zugrunde liegenden ein-dimensionalen Systems. Dies war so auch erwartet worden. Durch Summation der Leistung über der Frequenz erreicht man eine Übereinstimmung. Diese ist bei um so tieferen Frequenzen tragfähig, je breiter die Frequenzbänder gewählt werden.



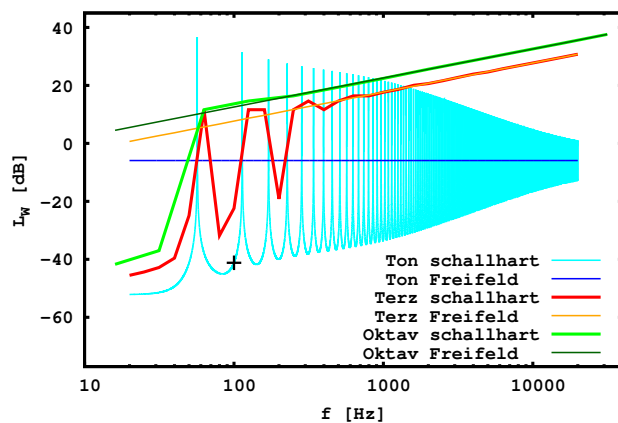
**Abbildung 1:** Der normierte Schalldruckbetrag  $p$ , dargestellt über der Ortskoordinate  $x$  des ein-dimensionalen Systems.



**Abbildung 2:** Der normierte Schallschnellebetrag  $v$ , dargestellt über der Ortskoordinate  $x$  des ein-dimensionalen Systems.



**Abbildung 3:** Die Schalleistung in logarithmischer Darstellung  $L_P$  ( $0 \text{ dB} \hat{=} 10^{-12} \text{ W}$ ), berechnet gemäß (8) und (14), dargestellt über der Quell-Koordinate  $x_0$  im ein-dimensionalen System. Das violette Kreuz zeigt die eingeleitete Leistung aus dem Fall der Abbildungen 1 und 2. Der Mittelwert (hellblaue Kurve) wurde gemäß (15) über die physikalische Größe  $P$  und nicht über den Leistungspegel  $L_P$  berechnet. Alle Kurven sind über ihre jeweiligen Mittelwerte skaliert.



**Abbildung 4:** Die Schalleistung in logarithmischer Darstellung  $L_P$  ( $0 \text{ dB} \hat{=} 10^{-12} \text{ W}$ ) gemittelt über alle Quellpositionen  $x_0$ , dargestellt über der Anregungsfrequenz  $f$ .

## Zusammenfassung

Die d'Alembert-Lösung und die Bernoulli-Lösung liefern prinzipiell dieselben Verläufe der Feldgrößen  $p$  und  $v$ . Bei der Bernoulli-Lösung sind dafür bereits viele Eigenmoden nötig. Dies lässt für die spätere drei-dimensionale Untersuchung bereits erheblichen Ressourcenbedarf erwarten.

Bei monofrequenter Anregung zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen der real eingeleiteten Schalleistung und der beabsichtigten Quellkenngröße der Freifeldschalleistung aus dem EMRP-Projekt. Erst mit Summation über hinreichend breite Frequenzbänder lässt sich eine Übereinstimmung erreichen und die Freifeldschalleistung liefert einen vernünftigen Schätzwert für die tatsächlich abgestrahlte Schalleistung und damit eine Kennzahl für die Quelle.

Kann man ein Kriterium hinsichtlich der Frequenzsummation angeben, ab dem diese Repräsentation zuverlässig funktioniert? Dieses Kriterium könnte z.B. abhängen von der Frequenzbandbreite oder der Modenüberlappung. Eventuell könnte auch eine ganz andere physikalische Größe als Quellkenngröße gewählt werden. Dies muss die weitere Untersuchung zeigen.

## Danksagung

Diese Forschung wurde im Rahmen des geförderten EMRP-Projekts SIB56 [1] durchgeführt.

The EMRP is jointly funded by the EMRP participating countries within EURAMET and the European Union.

## Literatur

- [1] <http://www.ptb.de/emrp/sib56-home.html>
- [2] Möser, M.: Technische Akustik. Springer, Berlin, 9. Auflage, 2012
- [3] ISO 9613-1: Akustik – Dämpfung des Schalls bei der Ausbreitung im Freien; Teil 1: Berechnung der Schallabsorption durch die Luft, Beuth, 1993