

---

**DKD-3-E2**

**Angabe der Messunsicherheit  
bei Kalibrierungen**

Ergänzung 2 – Zusätzliche Beispiele

---

Herausgegeben von der Akkreditierungsstelle des Deutschen Kalibrierdienstes (DKD) bei der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB).

Copyright © 2002 by DKD

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

## Deutscher Kalibrierdienst (DKD)

Im DKD sind Kalibrierlaboratorien von Industrieunternehmen, Forschungsinstituten, technischen Behörden, Überwachungs- und Prüfinstitutionen zusammengeschlossen. Sie werden von der Akkreditierungsstelle des DKD bei der PTB akkreditiert und überwacht. Sie führen Kalibrierungen von Messgeräten und Maßverkörperungen für die bei der Akkreditierung festgelegten Messgrößen und Messbereiche durch. Die von ihnen ausgestellten DKD-Kalibrierscheine sind ein Nachweis für die Rückführung auf nationale Normale, wie sie von der Normenfamilie DIN EN ISO 9000 und der DIN EN ISO/IEC 17025 gefordert wird.

Kalibrierungen durch DKD-Laboratorien geben dem Anwender Sicherheit für die Verlässlichkeit von Messergebnissen, erhöhen das Vertrauen der Kunden und die Wettbewerbsfähigkeit auf dem nationalen und internationalen Markt und dienen als messtechnische Grundlage für die Mess- und Prüfmitelüberwachung im Rahmen von Qualitätssicherungsmaßnahmen.

Im DKD werden Kalibriermöglichkeiten für elektrische Messgrößen, für Länge, Winkel und weitere geometrische Größen, für Rauheit, Koordinaten- und Formmesstechnik, für Zeit und Frequenz, für Kraft, Drehmoment, Beschleunigung, Druck, Durchfluss, Temperatur, Feuchte, medizinische Messgrößen, akustische Messgrößen, optische Messgrößen, ionisierende Strahlung und weitere Messgrößen angeboten.

**Veröffentlichungen:** siehe Internet

### Anschrift:

Deutscher Kalibrierdienst bei der  
Physikalisch-Technischen Bundesanstalt  
Bundesallee 100, D-38116 Braunschweig  
Postfach 33 45, D-38023 Braunschweig  
Telefon Sekretariat: (05 31) 5 92-19 01  
Fax: (05 31) 5 92-19 05  
E-Mail: dkd@ptb.de  
Internet: www.dkd.info

**Übersetzung des Abschnittes Supplement 2, Examples der Publikation EA-4/02,  
„Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration“, rev 00, Dez. 1999**

**Inhaltsverzeichnis**

	Seite
S8 Einleitung	4
S9 Kalibrierung eines tragbaren Digital-Multimeters bei einer Gleichspannung von 100 V	7
S10 Kalibrierung eines Messschiebers	11
S11 Kalibrierung eines Temperatur-Blockkalibrators bei einer Temperatur von 180 °C	16
S12 Kalibrierung eines Haushalts-Wasserzählers	20
S13 Kalibrierung eines Lehrings mit einem Nenndurchmesser von 90 mm	24

**Nationales Vorwort**

Die vorliegende Beispielsammlung DKD-3-E-2 ergänzt die Schrift DKD-3, Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen, und die bereits 1998 erschienene Beispielsammlung DKD-3-E1. DKD-3-E2 ist die deutsche Übersetzung des im Dezember 1999 erschienenen Supplement 2 der Publikation EA-4/02, Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration. Offensichtliche Druckfehler wurden in der Übersetzung korrigiert.

Die Beispielsammlung soll die Umsetzung der in DKD-3 dargestellten Methode zur Ermittlung der Messunsicherheit erleichtern.

Zusätzliche Beispiele aus den Kalibrierlaboratorien und den Fachausschüssen des DKD sind weiterhin willkommen.

## **S8 Einleitung**

- S8.1** Die folgenden Beispiele wurden ausgewählt, um das Verfahren zur Ermittlung der Messunsicherheit weiter zu verdeutlichen. Sie vervollständigen die in Ergänzung 1 zur EA-4/02 (früher: EAL-R2) (1. Auflage, November 1997) angegebenen Beispiele. Die vorliegende Beispielsammlung konzentriert sich auf Situationen, in denen ein oder zwei Unsicherheitsbeiträge in der Unsicherheitsanalyse dominieren oder in denen die Anzahl der Wiederholungsmessungen klein ist.
- S8.2** Die Beispiele sollen in der Praxis auftretende Situationen veranschaulichen. Es wird jedoch betont, dass es bei praktischen Anwendungen nicht erforderlich ist, die in diesen Beispielen angegebenen mathematischen Herleitungen nachzuvollziehen, insbesondere nicht die in den mathematischen Anmerkungen zu einigen Beispielen. Dem Benutzer wird vielmehr empfohlen, die Ergebnisse der theoretischen Darstellungen zu verwenden, nachdem er sich mit den Bedingungen, die erfüllt werden müssen, vertraut gemacht hat. Wenn z.B. in einer gegebenen Situation festgestellt wird, dass das Messergebnis eine rechteckförmige Verteilung hat (wie es der Fall wäre, wenn nur ein rechteckförmig verteilter Beitrag aufträte, der bei der Unsicherheitsfortpflanzung berücksichtigt werden müsste), kann man sofort folgern, dass ein Erweiterungsfaktor von  $k = 1,65$  angewendet werden muss, wenn eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 % erreicht werden soll (siehe S9.14).
- S8.3** Einen Schluss, den man generell für die Fortpflanzung der Messunsicherheit ziehen kann, ist, dass im Falle von nur einem dominierenden Beitrag dessen Verteilungstyp auch für das Messergebnis gilt. Um die Unsicherheit des Messergebnisses zu ermitteln, muss jedoch wie üblich der entsprechende Sensitivitätskoeffizient benutzt werden.
- S8.4** Es ist anzumerken, dass die Situation, in der die Messunsicherheit nur einen oder einige dominierende Beiträge enthält, oft im Zusammenhang mit einfacheren Messgeräten auftritt, bei denen der dominierende Beitrag häufig aus ihrer begrenzten Auflösung resultiert. Es mag daher paradox erscheinen, dass die Behandlung der Messunsicherheit bei einfacheren Geräten - wie durch die Beispiele dieser Ergänzung dargestellt - aufwendiger als die Behandlung der einfacheren Beispiele in der Ergänzung 1 ist. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass die mathematischen Ableitungen, die als schwierig empfunden werden können, nicht in das Hauptdokument aufgenommen wurden, sondern aus didaktischen Gründen an den Stellen eingefügt sind, an denen sie benötigt werden.
- S8.5** Die Beispiele beruhen auf Entwürfen, die von Expertengruppen der EA erstellt wurden. Diese Entwürfe sind vereinfacht und aufeinander abgestimmt worden, um sie für das Laborpersonal in allen Gebieten der Kalibrierung transparent zu machen. Es wird daher erwartet, dass diese Beispiele wie die früheren, die als Ergänzung E1 zu DKD-3 (engl. EA-4/02-S1) veröffentlicht wurden, dazu beitragen, die Einzelheiten der Aufstellung des Modells der Auswertung besser zu verstehen und dadurch unabhängig vom jeweiligen Kalibriergewbiet zur Vereinheitlichung der Ermittlung der Messunsicherheit beitragen.

- S8.6** Die in den Beispielen angegebenen Werte und Unsicherheitsbeiträge sind nicht als verbindliche oder anzustrebende Anforderungen gedacht. Die Laboratorien müssen die Unsicherheitsbeiträge auf der Grundlage der Modellfunktion bestimmen, die sie bei der Auswertung der von ihnen durchgeführten Kalibrierung benutzen, und die so ermittelte Messunsicherheit auf dem von ihnen ausgestellten Kalibrierschein angeben.
- S8.7** Die Beispiele werden gemäß dem üblichen Schema dargestellt, das in der ersten Ergänzung E1 zu DKD-3 (engl. EA-4/02-S1) vorgestellt und eingeführt wurde. Einzelheiten findet der Leser im Abschnitt S1.4 dieses Dokuments.
- S8.8** Die Unsicherheitsanalyse in den Beispielen soll die Grundlagen der jeweiligen Messung und die Methode zur Ermittlung des Messergebnisses und der beigeordneten Messunsicherheit darstellen. Um die Analyse auch für diejenigen transparent zu gestalten, die keine Experten auf dem betreffenden Gebiet der Metrologie sind, ist eine einheitliche Nomenklatur für die Wahl der Größensymbole angewendet worden, die mehr auf den physikalischen Hintergrund als auf die in verschiedenen Gebieten übliche Praxis abzielt.
- S8.9** In allen Fällen treten wiederholt mehrere Größen der gleichen Art auf. Eine von ihnen ist die Messgröße, d.h. die zu messende Größe; eine andere ist die durch das Gebrauchsnormale bereitgestellte Größe, die die lokal realisierte Einheit darstellt; an diese Größe wird die Messgröße angeschlossen. Neben diesen beiden Größen gibt es in allen Fällen noch weitere, die die Rolle zusätzlicher lokaler Größen oder Korrekturen übernehmen.
- S8.10** Korrekturen beschreiben die unvollkommene Übereinstimmung zwischen einer Messgröße und dem Ergebnis einer Messung. Einige der Korrekturen sind durch vollständige Messergebnisse gegeben, d.h. einen Messwert und die beigeordnete Messunsicherheit. Bei anderen wird die Verteilung der Werte aus der mehr oder weniger vollständigen Kenntnis ihrer Natur abgeleitet. In den meisten Fällen führt das zu einer Schätzung eingrenzender Werte für die unbekannt Abweichungen.
- S8.11** In bestimmten Fällen wird die durch ein Gebrauchsnormale dargestellte Größe durch den Nennwert des Normals charakterisiert. Daher werden häufig Nennwerte, die verallgemeinernd gesagt Kalibrierartefakte charakterisieren oder identifizieren, in die Unsicherheitsanalyse einbezogen.
- S8.12** Um bei den mathematischen Modellen der Auswertung zwischen diesen beiden Konzepten zu unterscheiden, sind die Beispiele so gestaltet, dass sie den nachstehenden Bezeichnungsregeln folgen. Es ist jedoch offensichtlich, dass es nicht möglich ist, diesen Regeln strikt zu folgen, weil in den verschiedenen Gebieten der Metrologie der Gebrauch von Symbolen unterschiedlich gehandhabt wird.
- S8.13** Die hier angewendete Bezeichnungsweise unterscheidet zwischen Hauptwerten, Nennwerten, Korrekturen und Grenzwerten:

Hauptwerte sind gemessene oder beobachtete Werte, die einen wesentlichen Beitrag zum Wert einer Messgröße liefern. Sie werden durch kursive Kleinbuchstaben dargestellt; stellt die Größe eine Differenz dar, wird ihnen ein großes griechisches Delta vorangestellt.

BEISPIEL:

$t_{iX}$  - von einem zu kalibrierenden Thermometer X angezeigte Temperatur  
(Index i bedeutet angezeigt)

$\Delta l_{iS}$  - beobachtete Längendifferenz bei der Verschiebung mittels einer Messspindel.

Nennwerte<sup>1</sup> sind festgelegte Werte für die Darstellung einer Größe durch ein Normal oder ein Messgerät. Sie sind genäherte Werte, die den Hauptanteil des dargestellten Werts angeben. Sie werden durch kursive Großbuchstaben gekennzeichnet.

BEISPIEL:

$L$  - Nennlänge eines zu kalibrierenden Endmaßes.

Korrekturen geben von den Hauptwerten kleine Abweichungen an, die bekannt sind oder geschätzt werden müssen. In den meisten Fällen sind sie additiv. Sie werden durch das für die betrachtete Größe gewählte Symbol dargestellt, dem ein kleines griechisches Delta vorangestellt wird.

BEISPIEL:

$\delta m_D$  - mögliche Abweichung auf Grund der Drift des Werts eines Referenzgewichtstücks seit der letzten Kalibrierung

$\delta m_C$  - Korrektur für außermittige Last und magnetische Effekte bei der Kalibrierung eines Gewichtstücks

Grenzwerte sind geschätzte, feste Werte, die den Bereich charakterisieren, in dem unbekannte Werte einer Größe liegen können. Sie werden durch das für die betrachtete Größe gewählte Symbol dargestellt, dem ein großes griechisches Delta vorangestellt wird.

BEISPIEL:

$\Delta \alpha_X$  - geschätzte Halbweite des Intervalls der möglichen Abweichungen des linearen thermischen Widerstandskoeffizienten, die in einer Herstellerspezifikation für einen zu kalibrierenden Widerstand angegeben ist.

Wie in den Beispielen gezeigt, erfolgt die Unterscheidung verschiedener Größen derselben Art durch Indizes. Dabei wird die international vereinbarte Schreibweise für physikalische Größen benutzt: Indizes, die physikalische Größen darstellen, werden kursiv, Indizes, die Artefakte, Geräte usw. benennen, in steiler, senkrechter Schrift geschrieben.

<sup>1</sup> Anm. des Übersetzers: Der Begriff Nennwert ist im VIM unter 5.3 definiert als „Gerundeter Wert oder Näherungswert eines Merkmals eines Messgeräts, der auf seinen Gebrauch hinweist“. Hier wird er in dem Sinne allgemeiner benutzt, das die Beschränkung auf ein Merkmal eines Messgerätes fallen gelassen wird. Unter Nennwert wird hier ein gerundeter Wert oder Näherungswert verstanden, der innerhalb der Auswertung einer Messung ein Merkmal mit ausreichender Genauigkeit kennzeichnet, so dass Abweichungen unberücksichtigt bleiben können.

**S8.14** Referenzwerte werden durch ein Größensymbol mit dem Index Null gekennzeichnet.

BEISPIEL:

$p_0$  - Referenzdruck, z.B. von 1000 mbar.

**S8.15** Verhältnisse zwischen Größen derselben Art (dimensionslose Verhältnisse) werden durch kursive Kleinbuchstaben dargestellt.

BEISPIEL:

$r = R_{iX} / R_{iN}$  - Verhältnis zwischen dem angezeigten Widerstandswert eines unbekanntem Widerstands und dem Widerstandswert eines Referenzwiderstands (Index i bedeutet angezeigt).

**S8.16** Bei Verwendung mehrerer Indizes wird ihre Reihenfolge so gewählt, dass der allgemeinere Begriff weiter links und der speziellere Begriff weiter rechts indiziert wird.

BEISPIEL:

$V_{i1}, V_{i2}$  - von Voltmeter 1 bzw. 2 angezeigte Spannung (Index i bedeutet angezeigt).

**S8.17** Den Beispielen in dieser zweiten Ergänzung zu DKD-3 (engl. EA-4/02) sollen weitere Beispiele folgen, die verschiedene in Zusammenhang mit der Kalibrierung von Messgeräten auftretende Aspekte veranschaulichen. Beispiele sind auch in EAL- und EA-Leitfäden<sup>2</sup> zu finden, die sich mit der Kalibrierung spezieller Messgerätearten befassen.

## **S9 Kalibrierung eines tragbaren Digital-Multimeters bei einer Gleichspannung von 100 V**

**S9.1** Als Teil einer allgemeinen Kalibrierung wird ein tragbares Digital-Multimeter (DMM) bei einer Eingangs-Gleichspannung von 100 V mit einem Multifunktionskalibrator als Gebrauchsnorm kalibriert. Das folgende Messverfahren wird angewendet:

- (1) Die Ausgangsklemmen des Kalibrators werden mittels geeigneter Messkabel an die Eingangsklemmen des DMM angeschlossen.
- (2) Der Kalibrator wird auf 100 V eingestellt und nach einer ausreichenden Stabilisierungszeit wird die DMM-Anzeige abgelesen.
- (3) Die Messabweichung der Anzeige des DMM wird unter Verwendung der DMM-Anzeigen und der Kalibratoreinstellungen berechnet.

**S9.2** Es ist zu beachten, dass die Messabweichung der Anzeige des DMM, die mit diesem Messverfahren gewonnen wird, den Offseteffekt und Linearitätsabweichungen enthält.

<sup>2</sup> EA-10/03 (früher EAL-G26), Calibration of Pressure Balances

EA-10/08 (früher EAL-G31), Calibration of Thermocouples

EA-10/09 (früher EAL-G32), Measurement and Generation of Small AC Voltages with Inductive Voltage Dividers

EA-10/10, EA Guidelines on the Determination of Pitch Diameter of Parallel Thread Gauges by Mechanical Probing



**S9.3** Die Messabweichung  $E_x$  der Anzeige des zu kalibrierenden DMM erhält man aus

$$E_x = V_{iX} - V_s + \delta V_{iX} - \delta V_s \quad (\text{S9.1})$$

mit

- $V_{iX}$  - vom DMM angezeigte Spannung (der Index  $i$  bedeutet Anzeige),
- $V_s$  - vom Kalibrator erzeugte Spannung,
- $\delta V_{iX}$  - Korrektur der angezeigten Spannung für die endliche Auflösung des DMM,
- $\delta V_s$  - Korrektur der Spannung des Kalibrators:
  - (1) für die Drift seit der letzten Kalibrierung,
  - (2) für Abweichungen aufgrund des kombinierten Effekts von Offset, Nichtlinearität und Verstärkungsdifferenzen,
  - (3) für Abweichungen in der Umgebungstemperatur,
  - (4) für Abweichungen der Netzspannung,
  - (5) für Effekte der Fehlanpassung aufgrund des endlichen Eingangswiderstands des zu kalibrierenden DMM.

**S9.4** Wegen der geringen Auflösung der DMM-Anzeige wird bei den angezeigten Werten keine Streuung beobachtet.

**S9.5 DMM-Anzeigen ( $V_{iX}$ ):** Das DMM zeigt bei der 100-V-Einstellung des Kalibrators die Spannung 100,1 V an. Die DMM-Anzeige wird als präzise angenommen (siehe S9.4).

**S9.6 Gebrauchsnorm ( $V_s$ ):** Der Kalibrierschein für den Multifunktionskalibrator gibt an, dass die erzeugte Spannung der von der Kalibratoreinstellung angezeigte Wert ist und dass die zugehörige relative erweiterte Messunsicherheit  $W = 0,000\,02$  (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) ist, was eine erweiterte Messunsicherheit von  $U = 0,002\,V$  (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) für die 100-V-Einstellung ergibt.

**S9.7 Auflösung des zu kalibrierenden DMM ( $\delta V_{iX}$ ):** Die niedrigstwertige Ziffer der DMM-Anzeige entspricht einem Werteschritt<sup>3</sup> von 0,1 V. Jede DMM-Anzeige hat auf Grund der endlichen Auflösung der Anzeige eine Korrektur, die auf 0,0 V mit den Grenzen  $\pm 0,05\,V$  (d.h. der Hälfte des Werteschrittes) geschätzt wird.

**S9.8 Sonstige Korrekturen ( $\delta V_s$ ):** Da individuelle Zahlen nicht verfügbar sind, wird die mit verschiedenen Quellen verbundene Messunsicherheit aus den vom Hersteller des Kalibrators angegebenen Spezifikationen ermittelt. Diese Spezifikationen besagen, dass die vom Kalibrator erzeugte Spannung innerhalb von  $\pm(0,000\,1 \cdot V_s + 1\,mV)$ <sup>4</sup> mit der Einstellung des Kalibrators übereinstimmt, wenn folgende Messbedingungen vorliegen:

<sup>3</sup> Hierfür ist im deutschen Sprachbereich der Ausdruck Skalenteilungswert (SKW) üblich.

<sup>4</sup> Eine weit verbreitete Methode für die Darstellung der Genauigkeitsspezifikation für Messgeräte in Datenblättern oder Handbüchern besteht darin, die Spezifikationsgrenzen als "Einstellungen" anzugeben. Bei dem Kalibrator würde diese Angabe  $\pm(0,01\% \text{ der Einstellung} + 1\,mV)$  lauten. Selbst wenn diese Methode als gleichwertig mit der oben angegebenen Angabe angesehen wird, wird sie hier nicht angewendet, weil sie in vielen Fällen irreführend sein kann und weil sie keine Gleichung physikalischer Größen gemäß der international anerkannten Symbolnomenklatur darstellt.



- (1) Die Umgebungstemperatur liegt zwischen 18 °C und 23 °C.
- (2) Die Netzspannung für den Kalibrator liegt zwischen 210 V und 250 V.
- (3) Der Lastwiderstand an den Klemmen des Kalibrators ist größer als 100 kΩ.
- (4) Der Kalibrator wurde vor weniger als einem Jahr kalibriert.

Da diese Messbedingungen erfüllt sind und die Kalibrierhistorie des Kalibrators zeigt, dass man sich auf die Herstellerspezifikation verlassen kann, wird die Korrektur, die an die von dem Kalibrator erzeugte Spannung angelegt werden muss, innerhalb von  $\pm 0,011$  V mit 0,0 V angenommen.

**S9.9 Korrelation:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.

**S9.10 Messunsicherheitsbudget ( $E_x$ ):**

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$V_{iX}$	100,1 V	-	-	-	-
$V_S$	100,0 V	0,001 V	Normal	-1,0	-0,001 V
$\delta V_{iX}$	0,0 V	0,029 V	Rechteck	1,0	0,029 V
$\delta V_S$	0,0 V	0,0064 V	Rechteck	-1,0	-0,0064 V
$E_x$	0,1 V	0,030 V			

**S9.11 Erweiterte Messunsicherheit:** Die dem Ergebnis beizuordnende Standardmessunsicherheit wird durch den Effekt der endlichen Auflösung des DMM dominiert. Die endgültige Verteilung ist keine Normalverteilung, sondern im Wesentlichen rechteckförmig. Daher ist die in Anhang E zu DKD-3 (engl. EA-4/02) beschriebene Methode der effektiven Freiheitsgrade nicht anwendbar. Der für eine Rechteckverteilung geeignete Erweiterungsfaktor wird aus der in Gl. (S9.8) in dem mathematischen Hinweis S9.14 gegebenen Beziehung errechnet.

$$U = k \cdot u(E_x) = 1,65 \cdot 0,030 \text{ V} = 0,05 \text{ V}$$

**S9.12 Vollständiges Messergebnis:** Die Messabweichung der Anzeige des tragbaren Digitalvoltmeters bei 100 V beträgt  $(0,10 \pm 0,05)$  V.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 1,65$  ergibt. Sie entspricht bei der angenommenen Rechteckverteilung einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

- S9.13 Zusätzliche Bemerkungen:** Die für die Berechnung des Erweiterungsfaktors angewendete Methode beruht auf der Tatsache, dass die dem Ergebnis beigeordnete Messunsicherheit durch die endliche Auflösung des DMM dominiert wird. Das gilt im Prinzip für die Kalibrierung aller Anzeigeräte mit geringer Auflösung, vorausgesetzt dass die endliche Auflösung der dominierende Einfluss im Messunsicherheitsbudget ist.
- S9.14 Mathematischer Hinweis:** Liegt eine Messsituation vor, bei der ein Unsicherheitsbeitrag im Messunsicherheitsbudget als dominierender Beitrag - etwa der Beitrag mit dem Index 1 - bezeichnet werden kann, kann die dem Messergebnis  $y$  beizugeordnete Standardunsicherheit geschrieben werden als

$$u(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_R^2(y)}. \quad (\text{S9.2})$$

Hier bezeichnet

$$u_R(y) = \sqrt{\sum_{i=2}^N u_i^2(y)} \quad (\text{S9.3})$$

den Gesamtbeitrag der nicht-dominanten Einflüsse. Solange das Verhältnis des Gesamtbeitrags  $u_R(y)$  der nicht-dominanten Einflüsse zum Unsicherheitsbeitrag  $u_1(y)$  des dominierenden Einflusses nicht größer als 0,3 ist, kann Gl. (S9.2) durch

$$u(y) \cong u_1(y) \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{u_R(y)}{u_1(y)} \right)^2 \right] \quad (\text{S9.4})$$

angenähert werden. Der relative Fehler der Näherung ist kleiner als  $1,125 \cdot 10^{-3}$ . Die sich aus dem in der Klammer zusammengefassten Faktor in Gl. (S9.4) ergebende maximale relative Änderung in der Standardmessunsicherheit ist nicht größer als 5 %. Dieser Wert liegt innerhalb der für die mathematische Rundung von Messunsicherheiten akzeptierten Toleranz.

Unter diesen Annahmen stimmt die Verteilung der Werte, die der Messgröße zugeordnet werden können, im Wesentlichen mit der sich aus dem bekannten dominanten Beitrag ergebenden Verteilung überein. Aus dieser Verteilungsdichte  $\varphi(y)$  kann die Überdeckungswahrscheinlichkeit  $p$  für jeden Wert der erweiterten Messunsicherheit  $U$  durch die Integralrelation

$$p(U) = \int_{y-U}^{y+U} \varphi(y') dy' \quad (\text{S9.5})$$

bestimmt werden. Die Umkehrung dieser Relation ergibt die erweiterte Messunsicherheit als Funktion der Überdeckungswahrscheinlichkeit  $U = U(p)$  für die gegebene Verteilungsdichte  $\varphi(y)$ . Mit Hilfe dieser Beziehung kann der Erweiterungsfaktor schließlich wie folgt ausgedrückt werden:

$$k(p) = \frac{U(p)}{u(y)}. \quad (\text{S9.6})$$

Beim tragbaren Digital-Voltmeter ist der wesentliche Unsicherheitsbeitrag derjenige, der sich aus der endlichen Auflösung der Anzeige ergibt,  $u_{\delta V_X}(E_X) = 0,029 \text{ V}$ , während der Gesamtbeitrag der nicht-dominanten Einflüsse  $u_R(E_X) = 0,0064 \text{ V}$  beträgt. Das zugehörige Verhältnis beträgt  $u_R(E_X)/u_{\delta V_X}(E_X) = 0,22$ . Daher ist die sich ergebende Verteilung der Werte, die durchaus als Messabweichung der Anzeige bezeichnet werden können, im Wesentlichen rechteckförmig. Die Überdeckungswahrscheinlichkeit für eine Rechteckverteilung ist linear mit der erweiterten Messunsicherheit verknüpft ( $a$  ist die Halbwerte der Rechteckverteilung):

$$p = \frac{U}{a}. \quad (\text{S9.7})$$

Die Auflösung dieser Beziehung nach der erweiterten Messunsicherheit  $U$  und das Einsetzen des Ergebnisses zusammen mit dem Ausdruck der Standardmessunsicherheit für eine Rechteckverteilung gemäß Gl. (3.8) der DKD-3 (engl. EA-4/02) ergibt schließlich die Beziehung

$$k(p) = p\sqrt{3}. \quad (\text{S9.8})$$

Bei einer Überdeckungswahrscheinlichkeit  $p = 0,95$ , wie sie in der EA vereinbart ist, beträgt der zugehörige Erweiterungsfaktor demnach  $k = 1,65$ .

## S10 Kalibrierung eines Messschiebers

**S10.1** Ein Messschieber aus Stahl wird gegen Endmaße der Klasse I aus Stahl, die als Gebrauchsnormale dienen, kalibriert. Der Messbereich des Messschiebers beträgt 0 bis 150 mm. Die Auflösung beträgt 0,05 mm (der Skalenteilungswert der Hauptskala beträgt 1 mm, der des Nonius 1/20 mm). Mehrere Endmaße mit Nennlängen im Bereich 0,5 mm bis 150 mm werden für die Kalibrierung verwendet. Sie werden so gewählt, dass die Messpunkte in fast gleichen Abständen voneinander liegen (z.B. 0 mm, 50 mm, 100 mm, 150 mm), aber verschiedene Werte auf der Noniusskala ergeben (z.B. 0,0 mm, 0,3 mm, 0,6 mm, 0,9 mm).

Das Beispiel betrifft den 150-mm-Kalibrierpunkt für die Messung von Außenabmessungen. Vor der Kalibrierung wird der Zustand des Messschiebers mehrfach überprüft. Diese Prüfungen beziehen sich auf die Einschätzung des Abbe-Fehlers, die Qualität der Messflächen (Ebenheit, Parallelität, Rechtwinkligkeit) und die Funktion der Feststelleinrichtung.

**S10.2** Die Messabweichung der Anzeige  $E_X$  des Messschiebers bei der Referenztemperatur  $t_0 = 20^\circ \text{C}$  ergibt sich aus der Beziehung:

$$E_X = l_{iX} - l_S + L_S \cdot \bar{\alpha} \cdot \Delta t + \delta l_{iX} + \delta l_M \quad (\text{S10.1})$$

mit

- $l_{iX}$  - Anzeige des Messschiebers,
- $l_s$  - Länge des benutzten Endmaßes,
- $L_s$  - Nennlänge des benutzten Endmaßes,
- $\bar{\alpha}$  - mittlerer Wärmeausdehnungskoeffizient des Materials des Messschiebers und des Endmaßes,
- $\Delta t$  - Temperaturunterschied zwischen Messschieber und Endmaß,
- $\delta l_{iX}$  - Korrektur für endliche Auflösung der Messschieber,
- $\delta l_M$  - Korrektur für mechanische Effekte wie aufgebrachte Messkraft, Abbe-Fehler, Ebenheits- und Parallelitätsabweichung der Messflächen.

**S10.3 Gebrauchsnormale ( $l_s, L_s$ ):** Die Längen der als Gebrauchsnormale verwendeten Bezugsendmaße werden zusammen mit der beigeordneten erweiterten Messunsicherheit im Kalibrierschein angegeben. Dieser Schein bestätigt, dass die Endmaße den Anforderungen für Endmaße der Klasse I gemäß DIN EN ISO 3650 entsprechen, d.h. dass das Mittenmaß der Endmaße innerhalb von  $\pm 0,8 \mu\text{m}$  mit der Nennlänge übereinstimmt. Bei den Istlängen der Endmaße werden die Nennlängen ohne Korrektur verwendet, wobei die Toleranzgrenzen als obere und untere Grenze des Variabilitätsbereiches genommen werden.

**S10.4 Temperatur ( $\Delta t, \bar{\alpha}$ ):** Nach einer ausreichenden Temperierzeit sind die Temperaturen des Messschiebers und des Endmaßes innerhalb  $\pm 2 \text{ }^\circ\text{C}$  gleich. Der mittlere Wärmeausdehnungskoeffizient ist  $11,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  (Die Unsicherheit des mittleren Wärmeausdehnungskoeffizienten und der Differenz der Wärmeausdehnungskoeffizienten ist nicht berücksichtigt worden; ihr Einfluss wird im vorliegenden Fall als vernachlässigbar angesehen. Siehe DKD-3-E1 (engl. EA-4/02-S1), Beispiel S4.).

**S10.5 Auflösung des Messschiebers ( $\delta l_{iX}$ ):** Die Skalenteilung der Noniuskala beträgt 0,05 mm. Daher wird angenommen, dass den abgelesenen Werten aufgrund der endlichen Auflösung eine Rechteckverteilung mit der Halbweite  $\pm 25 \mu\text{m}$  zuzuordnen ist.

**S10.6 Mechanische Effekte ( $\delta l_M$ ):** Diese Effekte umfassen die aufgebrachte Messkraft, den Abbe-Fehler und das Spiel zwischen der Führungsschiene und dem beweglichen Messschnabel. Zusätzliche Effekte können verursacht werden, wenn die Messflächen nicht ausreichend eben, nicht parallel zueinander und nicht rechtwinklig zur Führung sind. Um den Aufwand zu minimieren, wird nur der Gesamtbereich der möglichen Abweichungen, die innerhalb  $\pm 50 \mu\text{m}$  liegen, berücksichtigt.

**S10.7 Korrelation:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.

**S10.8 Messungen ( $l_{iX}$ ):** Die Messung wird mehrfach wiederholt, ohne dass bei den Beobachtungen eine Streuung festgestellt wird. Die Unsicherheit aufgrund begrenzter Wiederholpräzision liefert demnach keinen Beitrag. Das Messergebnis für das 150-mm-Endmaß beträgt 150,10 mm.

**S10.9 Messunsicherheitsbudget ( $E_x$ ):**

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicherheits- beitrag $u_i(y)$
$l_{iX}$	150,10 mm	-	-	-	-
$l_s$	150,00 mm	0,46 $\mu\text{m}$	Rechteck	-1,0	-0,46 $\mu\text{m}$
$\Delta t$	0	1,15 K	Rechteck	1,7 $\mu\text{m K}^{-1}$	2,0 $\mu\text{m}$
$\delta l_{iX}$	0	15 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	15 $\mu\text{m}$
$\delta l_M$	0	29 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	29 $\mu\text{m}$
$E_x$	0,10 mm	33 $\mu\text{m}$			

**S10.10 Erweiterte Messunsicherheit:** Die dem Ergebnis beizuordnende Messunsicherheit wird durch die von der Messkraft und der endlichen Auflösung der Noniusskala herrührenden Einflüsse dominiert. Daraus resultiert keine Normalverteilung, sondern eine im Wesentlichen trapezförmige mit einem Verhältnis  $\beta = 0,33$  der Halbweite des Plateaubereichs zur Halbweite des gesamten Variationsbereichs. Daher ist die in Anhang E von DKD-3 (engl. EA-4/02) beschriebene Methode der effektiven Freiheitsgrade nicht anwendbar. Der aus dieser Trapezverteilung abgeleitete Erweiterungsfaktor  $k = 1,83$  ergibt sich aus Gl. (S10.10) des Abschnitts S10.13 (Mathematischer Hinweis). Daher ist

$$U = k \cdot u(E_x) = 1,83 \cdot 0,033 \text{ mm} \cong 0,06 \text{ mm}$$

**S10.11 Vollständiges Messergebnis:**

Am Kalibrierpunkt 150 mm beträgt die Messabweichung der Anzeige des Messschiebers  $(0,10 \pm 0,06)$  mm.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 1,83$  ergibt. Sie entspricht bei der angenommenen Trapezverteilung einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

**S10.12 Zusätzliche Bemerkung:** Die für die Berechnung des Erweiterungsfaktors verwendete Methode ist darauf zurückzuführen, dass die dem Ergebnis beigeordnete Messunsicherheit durch zwei Einflüsse dominiert wird: die mechanischen Effekte und die endliche Auflösung der Noniusskala.

Daher ist es nicht gerechtfertigt eine Normalverteilung für die Ausgangsgröße anzunehmen, und die Bedingungen von DKD-3 (engl. EA-4/02), Absatz 5.6 sind anwendbar. Im Hinblick darauf, dass Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitsdichten in der Praxis nur auf 3 % bis 5 % genau bestimmt werden können, ist die Verteilung im Wesentlichen als trapezförmig anzusehen; sie wird durch Faltung der zwei den dominanten Einflüssen zugeordneten Rechteckverteilungen gewonnen. Die Halbweiten der unteren und der oberen Seite des sich ergebenden symmetrischen Trapezes sind 75  $\mu\text{m}$  bzw. 25  $\mu\text{m}$ ; in diesem Falle liegen 95 % der Fläche des Trape-

zes innerhalb von  $\pm 60 \mu\text{m}$  um seine Symmetrieachse, dies entspricht dem Erweiterungsfaktor  $k = 1,83$ .

**S10.13 Mathematischer Hinweis:** Ist die Messsituation so beschaffen, dass zwei Unsicherheitsbeiträge im Messunsicherheitsbudget dominieren, kann die in Abschnitt S9.14 vorgestellte Methode angewendet werden, wenn die beiden dominanten Beiträge - z.B. die Unsicherheitsbeiträge mit den Indizes 1 und 2 - zu einem Gesamtbeitrag zusammengefasst werden. Die Standardmessunsicherheit für das Messergebnis  $y$  kann in diesem Fall in der Form

$$u(y) = \sqrt{u_0^2(y) + u_R^2(y)} \quad (\text{S10.2})$$

geschrieben werden, wobei

$$u_0(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y)} \quad (\text{S10.3})$$

den Gesamtbeitrag der beiden dominanten Einflüsse und

$$u_R(y) = \sqrt{\sum_{i=3}^N u_i^2(y)} \quad (\text{S10.4})$$

den Gesamtbeitrag der verbleibenden nicht-dominanten Einflüsse bezeichnen. Wenn die beiden dominanten Unsicherheitsbeiträge von Rechteckverteilungen mit Halbwerten  $a_1$  und  $a_2$  herrühren, resultiert aus ihrer Faltung eine symmetrische Trapezverteilung mit den Halbwerten

$$a = a_1 + a_2 \quad \text{und} \quad b = |a_1 - a_2| \quad (\text{S10.5})$$

der unteren bzw. der oberen Seite (siehe Beispiel in Bild 1).

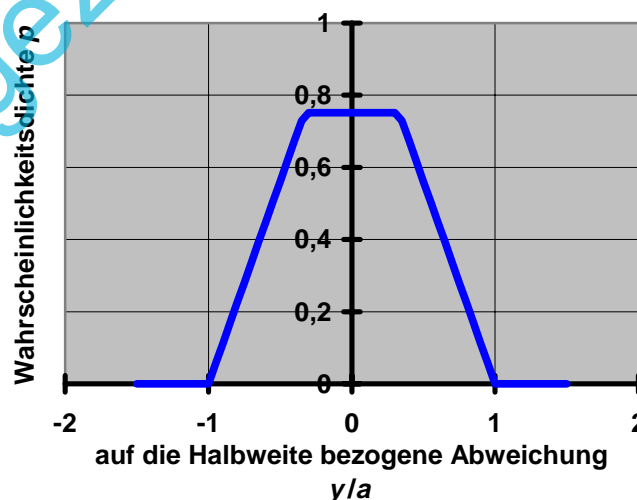


Bild 1: Auf die Halbwerte bezogene symmetrische trapezförmige Wahrscheinlichkeitsdichte mit dem Wert  $\beta = 0,33$  des Knickpunktparameters, die sich aus der Faltung von zwei Rechteckverteilungen ergibt.

Die Verteilung kann in der Form

$$\varphi(y) = \frac{1}{a(1+\beta)} \cdot \begin{cases} 1 & |y| < \beta \cdot a \\ \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) & \beta \cdot a \leq |y| \leq a \\ 0 & a < |y| \end{cases} \quad (\text{S10.6})$$

ausgedrückt werden. Das Verhältnis der Längen der oberen und der unteren Trapezseite wird als Knickpunktparameter bezeichnet und es gilt:

$$\beta = \frac{b}{a} = \frac{|a_1 - a_2|}{a_1 + a_2} \quad (\text{S10.7})$$

Das Quadrat der aus der Trapezverteilung in Gl. (S10.6) ermittelten Standardmessunsicherheit (d.h. die Varianz) ist

$$u^2(y) = \frac{a^2}{6} (1 + \beta^2). \quad (\text{S10.8})$$

Aus der Verteilung in Gl. (S10.6) wird die Abhängigkeit des Erweiterungsfaktors von der Überdeckungswahrscheinlichkeit gemäß der im Abschnitt S9.14 beschriebenen Methode hergeleitet.

$$k(p) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\beta^2}{6}}} \begin{cases} \frac{p(1+\beta)}{2} & \frac{p}{2-p} < \beta \\ 1 - \sqrt{(1-p)(1-\beta^2)} & \beta \leq \frac{p}{2-p} \end{cases}. \quad (\text{S10.9})$$

Bild 2 zeigt die Abhängigkeit des Erweiterungsfaktors  $k$  für eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 % vom Wert des Knickpunktparameters  $\beta$ .



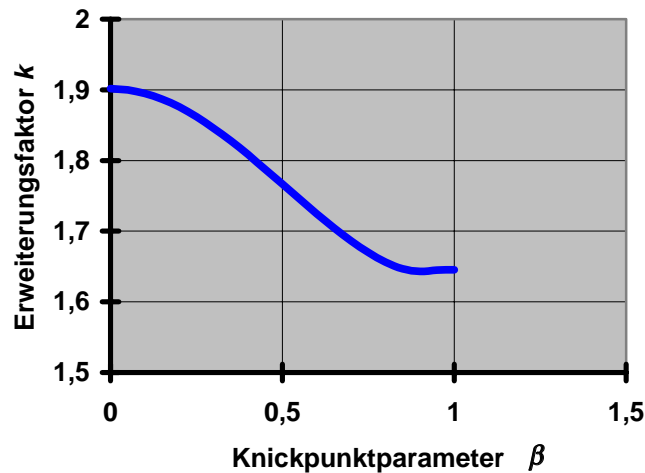


Bild 2: Abhängigkeit des Erweiterungsfaktors  $k$  vom Wert des Knickpunktparameters  $\beta$  einer Trapezverteilung<sup>5</sup> für eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 0,95.

Der zu einer Trapezverteilung mit einem Knickpunktparameter  $\beta = 0,33$  gehörende Erweiterungsfaktor für eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 % wird wie folgt berechnet

$$k = \frac{1 - \sqrt{(1-p)(1-\beta^2)}}{\sqrt{\frac{1+\beta^2}{6}}} \quad (\text{S10.10})$$

### S11 Kalibrierung eines Temperatur-Blockkalibrators bei einer Temperatur von 180 °C<sup>6</sup>

**S.11.1** Als Teil der Kalibrierung wird die Temperatur, die einer Messbohrung eines Temperatur-Blockkalibrators zugeordnet werden muss, gemessen. Dies geschieht, nachdem sich die Anzeige der eingebauten Temperaturanzeige auf 180,0 °C stabilisiert hat. Die Temperatur der Kalibrierbohrung wird durch ein eingesetztes Platin-Widerstands-Thermometer, das als Gebrauchsnormale dient, bestimmt, indem der elektrische Widerstand des Thermometers mit einer Wechselstrom-Widerstandsbrücke gemessen wird. Die Temperatur  $t_x$ , die als Temperatur der Messbohrung zugeordnet werden muss, wenn die Ablesung der eingebauten Temperaturanzeige 180,0 °C beträgt, ist gegeben durch:

<sup>5</sup> Anm. des Übersetzers:  $\beta=0$  entspricht einer Dreieckverteilung und  $\beta=1$  einer Rechteckverteilung.

<sup>6</sup> Ein ähnliches Beispiel findet sich in der Richtlinie DKD-R 5-4, Kalibrierung von Temperatur-Blockkalibratoren und in der EA-Richtlinie EA-10/13, Guidelines on the Calibration of Temperature Block Calibrators. Es ist hier in vereinfachter Form angegeben, um hervorzuheben, wie in einem Kalibrierverfahren ein Wert einer Anzeige eines Geräts zugeordnet wird. Dieses Verfahren ist für Kalibrierungen in verschiedenen Gebieten der Messtechnik grundlegend und daher von allgemeinem Interesse. Das Beispiel zeigt außerdem, dass dieses Problem auf zweierlei Weise angegangen werden kann: die direkte Zuordnung eines Werts zur Anzeige des Geräts und die Anbringung einer Korrektur an der Anzeige, gewöhnlich als Messabweichung der Anzeige bezeichnet.

$$t_X = t_S + \delta t_S + \delta t_D - \delta t_{iX} + \delta t_R + \delta t_A + \delta t_H + \delta t_V \quad (\text{S11.1})$$

mit

- $t_S$  - Temperatur des Gebrauchsnormals, abgeleitet aus der Wechselstrom-Widerstandsmessung
- $\delta t_S$  - Temperaturkorrektur auf Grund der Wechselstrom-Widerstandsmessung
- $\delta t_D$  - Temperaturkorrektur auf Grund der Drift des Gebrauchsnormals seit seiner letzten Kalibrierung
- $\delta t_{iX}$  - Temperaturkorrektur auf Grund der endlichen Auflösung der Anzeige des Temperatur-Blockkalibrators
- $\delta t_R$  - Temperaturkorrektur auf Grund der Temperaturunterschiede zwischen den einzelnen Messbohrungen<sup>7</sup>
- $\delta t_A$  - Temperaturkorrektur auf Grund der axialen Temperaturinhomogenität in einer Messbohrung
- $\delta t_H$  - Temperaturkorrektur auf Grund der Hysterese im ansteigenden und fallenden Zweig des Messzyklus
- $\delta t_V$  - Temperaturkorrektur auf Grund von Variationen der Temperatur innerhalb der Messzeit

Temperaturkorrekturen auf Grund der Wärmeleitfähigkeit werden nicht berücksichtigt, da das als Gebrauchsnormale verwendete Platin-Widerstandsthermometer einen Außendurchmesser  $d \leq 6$  mm hat. Frühere Untersuchungen haben gezeigt, dass Wärmeleitungseffekte in diesem Fall vernachlässigt werden können.

**S11.2 Gebrauchsnormale ( $t_S$ ):** Der Kalibrierschein für das als Gebrauchsnormale verwendete Widerstandsthermometer gibt die Beziehung zwischen Widerstand und Temperatur an. Der gemessene Widerstandswert entspricht einer Temperatur von 180,10 °C mit einer beigeordneten erweiterten Messunsicherheit  $U = 30$  mK (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ).

**S11.3 Bestimmung der Temperatur durch Widerstandsmessung ( $\delta t_S$ ):** Die Temperatur des als Gebrauchsnormale verwendeten Widerstandsthermometers wird mit 180,10 °C bestimmt. Die auf Temperatur umgerechnete Standardmessunsicherheit der Widerstandsmessung entspricht  $u(\delta t_S) = 10$  mK.

**S11.4 Temperaturdrift des Gebrauchsnormals ( $\delta t_D$ ):** Aufgrund allgemeiner Erfahrungen mit Platin-Widerstandsthermometern des als Gebrauchsnormale für die Messung verwendeten Typs wird die Temperaturänderung infolge der Widerstandsalterung seit der letzten Kalibrierung des Normals auf innerhalb von  $\pm 40$  mK geschätzt.

**S11.5 Einstellbarkeit des Temperatur-Blockkalibrators ( $\delta t_{iX}$ ):** Das eingebaute Thermometer des Temperatur-Blockkalibrators (Kalibratorthermometer) hat eine Skalenteilung von 0,1 K. Das ergibt Temperaturgrenzen von  $\pm 50$  mK, innerhalb derer der thermodynamische Zustand des Temperaturblocks eindeutig eingestellt werden kann.

<sup>7</sup> Anm. des Übersetzers: Abweichend vom engl. Originaltext wird hier die Temperaturabweichung zwischen den Messbohrungen betrachtet. Temperatur-Blockkalibratoren, wie sie im Originaltext vorgesehen sind, sind nach Auskunft der Experten im deutschen Sprachbereich unüblich.

Anmerkung: Wenn die eingebaute Anzeige keine Temperaturwerte angibt, sind die Grenzen auf Grund der Auflösung der Anzeige in Temperaturwerte umzurechnen. Dazu ist der aus der Anzeige abgeleitete Wert mit der Gerätekonstante zu multiplizieren.

- S11.6 Radiale Temperaturinhomogenität ( $\delta t_R$ ):** Die radiale Temperaturdifferenz zwischen verschiedenen Messbohrungen wird auf  $\pm 100$  mK geschätzt.
- S11.7 Axiale Temperaturinhomogenität ( $\delta t_A$ ):** Die Temperaturabweichungen auf Grund axialer Temperaturinhomogenität in der Messbohrung werden aus den Ablesungen für verschiedene Eintauchtiefen auf innerhalb von  $\pm 250$  mK geschätzt.
- S11.8 Hystereseeffekte ( $\delta t_H$ ):** Aus Ablesungen des Referenzthermometers während der Messzyklen mit ansteigender und fallender Temperatur wird die Temperaturabweichung für die Messbohrung aufgrund eines Hystereseeffekts auf innerhalb von  $\pm 50$  mK geschätzt.
- S11.9 Temperaturinstabilität ( $\delta t_V$ ):** Temperaturänderungen auf Grund von Temperaturinstabilität während des 30-minütigen Messzyklus werden auf innerhalb von  $\pm 30$  mK geschätzt.
- S11.10 Korrelationen:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.
- S11.11 Wiederholte Beobachtungen:** Wegen der endlichen Auflösung der Anzeige des eingebauten Thermometers ist eine Streuung der angezeigten Werte nicht beobachtet und nicht berücksichtigt worden.
- S11.12 Messunsicherheitsbudget ( $t_X$ ):**

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$t_S$	180,10 °C	15 mK	Normal	1,0	15 mK
$\delta t_S$	0,0 °C	10 mK	Normal	1,0	10 mK
$\delta t_D$	0,0 °C	23 mK	Rechteck	1,0	23 mK
$\delta t_{iX}$	0,0 °C	29 mK	Rechteck	-1,0	-29 mK
$\delta t_R$	0,0 °C	58 mK	Rechteck	1,0	58 mK
$\delta t_A$	0,0 °C	144 mK	Rechteck	1,0	144 mK
$\delta t_H$	0,0 °C	29 mK	Rechteck	1,0	29 mK
$\delta t_V$	0,0 °C	17 mK	Rechteck	1,0	17 mK
$t_X$	180,10 °C	164 mK			

**S11.13 Erweiterte Messunsicherheit:** Die dem Ergebnis beigeordnete Standardmessunsicherheit wird durch den Effekt der unbekanntem Temperaturkorrektur bezüglich der axialen Temperaturinhomogenität in der Messbohrung und der radialen Temperaturdifferenz zwischen den Messbohrungen dominiert. Die resultierende Verteilung ist keine Normalverteilung, sondern im Wesentlichen trapezförmig. Gemäß S10.13 ist der dem Knickpunktparameter  $\beta = 0,43$  entsprechende Erweiterungsfaktor  $k = 1,81$ .

$$U = k \cdot u(t_x) = 1,81 \cdot 164 \text{ mK} \cong 0,3 \text{ K}$$

**S11.14 Vollständiges Messergebnis:** Die Temperatur der Messbohrung, die einer Anzeige des eingebauten Kalibratorthermometers von  $180,0 \text{ }^\circ\text{C}$  zuzuordnen ist, beträgt  $180,1 \text{ }^\circ\text{C} \pm 0,3 \text{ K}$ .

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 1,81$  ergibt. Sie entspricht bei der angenommenen Trapezverteilung einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

**S11.15 Mathematischer Hinweis zum Modell:** Für viele Messtechniker ist es ungewöhnlich, dass die Anzeige des Kalibratorthermometers nicht explizit im Modell der Auswertung nach Gl. (S11.1) erscheint. Man kann ihrer Auffassung der Messaufgabe entgegenkommen, indem man das Problem alternativ durch die Messabweichung

$$E_x = t_x - t_i \quad (\text{S11.2})$$

der eingebauten Temperaturanzeige

$$E_x = t_s - t_i + \delta t_s + \delta t_D - \delta t_{IX} + \delta t_R + \delta t_A + \delta t_H + \delta t_V \quad (\text{S11.3})$$

beschreibt. Der Anzeigewert  $t_i$  ist dabei ein Nennwert. Sein Effekt besteht darin, die Skala der Messgröße zu verschieben. Er trägt jedoch nicht zu der Messunsicherheit bei, die der Messabweichung der Anzeige

$$u(E_x) = u(t_x) \quad (\text{S11.4})$$

beigeordnet ist<sup>8</sup>. Das Modell der Auswertung nach Gl. (S11.1) kann aus Gl. (S11.3) mit Hilfe der Definition der Messabweichung der Anzeige in Gl. (S11.2) zurück-erhalten werden.

Dieser Hinweis zeigt, dass es i. Allg. nicht nur einen Weg gibt, das Modell der Auswertung einer Messung zu wählen. Es steht vielmehr häufig dem Messtechniker frei, dasjenige Modell zu wählen, das seinen Gewohnheiten und Denkweisen am besten entspricht. Modelle der Auswertung, die mathematisch ineinander umgewandelt werden können, stellen denselben Messprozess dar. In Fällen mit einer kontinuierlichen Werteskala, wie bei der betrachteten Kalibrierung eines Temperaturblocks, können alle Modelle der Auswertung, die durch lineare Maßstabtransformationen ineinander überführt werden können, als gleichwertige Beschreibungen des vorgelegten Messproblems angesehen werden.

<sup>8</sup> Anm. des Übersetzers: Nennwert wird hier verstanden, wie in der Fußnote 1 auf Seite 6 angegeben, als fester, approximativer Wert, dem keine Unsicherheit zukommt.

## S12 Kalibrierung eines Haushalts-Wasserzählers

**S12.1** Die Kalibrierung eines Wasserzählers umfasst die Bestimmung der relativen Messabweichung der Anzeige innerhalb des zulässigen Volumendurchflussmessbereichs des Zählers. Die Messung erfolgt auf einem Prüfstand<sup>9</sup>, der den erforderlichen Wasserdurchfluss mit einem Druck von ca. 500 kPa, einem für städtische Leitungswassersysteme typischen Wert, liefert. Das Wasser wird in einem offenen Messbehälter gesammelt, der kalibriert ist und das Wasserreferenzvolumen liefert. Zu Beginn der Messung ist er leer, aber benetzt. Der Messbehälter hat einen enghalsigen Einfüllstutzen, an dem eine Skala angebracht ist, mit der der Füllstand ermittelt werden kann. Der zu kalibrierende Zähler liegt zwischen beiden Behältern und ist an diese angeschlossen. Er hat einen mechanischen Zähler mit Zeigern. Die Messung erfolgt bei einem Durchfluss von 2500 l/h im stationären Start-Stop-Betrieb, was bedeutet, dass der Durchfluss sowohl zu Beginn als auch am Ende der Messung gleich Null ist. Der Anzeigewert des Wasserzählers wird bei Beginn und bei Ende der Messung aufgezeichnet. Der Füllstand im Messbehälter wird bei Ende der Messung aufgezeichnet. Die Wassertemperatur und der Wasserdruck am Zähler und die Temperatur des Wassers im Messbehälter werden auch aufgezeichnet.

**S12.2** Die relative Messabweichung  $e_x$  der Anzeige in einem einzelnen Durchgang ist definiert als

$$e_x = \frac{\Delta V_{iX} + \delta V_{iX2} - \delta V_{iX1}}{V_X} - 1 \quad (\text{S12.1})$$

mit

$$V_X = (V_{iS} + \delta V_{iS})(1 + \alpha_s(t_s - t_0))(1 + \alpha_w(t_x - t_s))(1 - \kappa_w(p_x - p_s)) \quad (\text{S12.2})$$

wobei

- $\Delta V_{iX} = V_{iX2} - V_{iX1}$  - Differenz der Zähleranzeigen
- $V_{iX1}, V_{iX2}$  - Zähleranzeigen bei Beginn und bei Ende der Messung
- $\delta V_{iX1}, \delta V_{iX2}$  - Korrekturen auf Grund der endlichen Auflösung der Zähleranzeige
- $V_X$  - durch den Zähler während der Messung unter den vorherrschenden Bedingungen geflossenes Volumen, d.h. bei dem Druck  $p_X$  und der Temperatur  $t_X$  am Zählereingang
- $V_{iS}$  - am enghalsigen Einfüllstutzen des Messbehälters bei Ende der Messung angezeigtes Volumen
- $\delta V_{iS}$  - Korrektur des von der Füllstandsanzeige des Messbehälters angezeigten Volumens auf Grund der endlichen Auflösung der Skala

<sup>9</sup> Anm. des Übersetzers: Der Prüfstand besteht aus einem Vorratstank mit einem Pumpensystem und einem offenen Messbehälter.

$\alpha_s$	- thermischer Volumenausdehnungskoeffizient des Materials des Messbehälters
$t_s$	- Temperatur des Messbehälters
$t_0$	- Referenztemperatur, bei der der Messbehälter kalibriert wurde
$\alpha_w$	- thermischer Volumenausdehnungskoeffizient von Wasser
$t_x$	- Wassertemperatur am Zählereingang
$\kappa_w$	- Kompressibilität von Wasser
$p_s$	- Druck im Messbehälter (beträgt Null, wenn Überdruck betrachtet wird)
$p_x$	- Wasserdruck am Zählereingang

**S12.3 Messbehälter ( $V_{iS}, t_0$ ):** Der Kalibrierschein gibt an, dass die Füllstandsanzeige das Volumen von 200 l bei der Referenztemperatur  $t_0 = 20\text{ °C}$  mit einer beigeordneten relativen erweiterten Messunsicherheit von 0,1 % ( $k = 2$ ) anzeigt. Die dem Messwert beigeordnete erweiterte Messunsicherheit ist 0,2 l ( $k = 2$ ).

**S12.4 Auflösung der Füllstandsanzeige des Messbehälters ( $\delta V_{iS}$ ):** Der Wasserfüllstand des Messbehälters kann auf  $\pm 1\text{ mm}$  bestimmt werden. Mit dem Skalierungsfaktor 0,02 l/mm des Behälters wird daher die maximale Abweichung des Wasservolumens vom beobachteten angezeigten Wert auf  $\pm 0,02\text{ l}$  geschätzt.

**S12.5 Temperatur des Wassers und des Messbehälters ( $\alpha_s, t_s$ ):** Die Temperatur des Wassers im Messbehälter wird auf  $15\text{ °C}$  innerhalb von  $\pm 2\text{ K}$  bestimmt. Diese Grenzen decken alle möglichen Unsicherheitsquellen, wie z. B. Beiträge aus der Kalibrierung der Temperaturfühler, der Auflösung der Anzeige und vom Temperaturgradienten im Behälter ab. Der thermische Volumenausdehnungskoeffizient des Behältermaterials (Stahl) wird einem Handbuch über Materialdaten entnommen und als Konstante angesehen, die gleich  $\alpha_s = 51 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$  im betrachteten Temperaturintervall ist. Da zu diesem Wert keine Messunsicherheit angegeben ist, wird er als bis auf seine letzte signifikante Stelle bekannt angenommen. Für die unbekanntenen Abweichungen wird daher angenommen, dass sie innerhalb der Rundungsgrenzen von  $\pm 0,5 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$  liegen.

**S12.6 Wassertemperatur am Zähler ( $\alpha_w, t_x$ ):** Die Wassertemperatur am Zählereingang wird auf  $16\text{ °C}$  innerhalb von  $\pm 2\text{ K}$  bestimmt. Diese Grenzen decken alle möglichen Unsicherheitsquellen wie z. B. Beiträge aus der Kalibrierung der Temperaturfühler, der Auflösung der Ablesung und aus kleinen Temperaturänderungen während eines Messdurchgangs ab. Der thermische Volumenausdehnungskoeffizient von Wasser wird einem Handbuch über Materialdaten entnommen und als Konstante angesehen, die gleich  $\alpha_w = 0,15 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$  im betrachteten Temperaturintervall ist. Da zu diesem Wert keine Messunsicherheit angegeben ist, wird angenommen, dass er bis auf seine kleinste signifikante Stelle bekannt ist. Für die unbekanntenen Abweichungen wird daher angenommen, dass sie innerhalb der Rundungsgrenzen von  $\pm 0,5 \cdot 10^{-6}\text{ K}^{-1}$  liegen.



**S12.7 Druckdifferenz des Wassers im Zähler und im Behälter ( $\kappa_w, p_s, p_x$ ):** Der Überdruck des Wassers am Zählereingang beträgt 500 kPa mit relativen Abweichungen, die nicht größer als  $\pm 10\%$  sind. Auf seinem Weg vom Zählereingang zum Messbehälter expandiert das Wasser auf einen Überdruck von 0 kPa (Atmosphärendruckbedingung). Die Kompressibilität von Wasser wird einem Handbuch über Materialdaten entnommen und als Konstante angesehen, die gleich  $\kappa_w = 0,46 \cdot 10^{-6} \text{ kPa}^{-1}$  für das betrachtete Temperaturintervall ist. Da zu diesem Wert keine Messunsicherheit angegeben ist, wird er als bis auf seine letzte signifikante Stelle bekannt angenommen. Für die unbekanntenen Abweichungen wird somit angenommen, dass sie innerhalb der Rundungsgrenzen von  $\pm 0,005 \cdot 10^{-6} \text{ kPa}^{-1}$  liegen.

**S12.8 Korrelation:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.

**S12.9 Messunsicherheitsbudget ( $V_x$ ):**

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standardmessunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitätskoeffizient $c_i$	Unsicherheitsbeitrag $u_i(y)$
$V_{is}$	200,02 l	0,10 l	Normal	1,0	0,10 l
$\delta V_{is}$	0,0 l	0,0115 l	Rechteck	1,0	0,0115 l
$\alpha_s$	$51 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	$0,29 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Rechteck	$-1000 \text{ l} \cdot \text{K}$	$-0,29 \cdot 10^{-3} \text{ l}$
$t_s$	15°C	1,15 K	Rechteck	$-0,0198 \text{ l} \cdot \text{K}^{-1}$	$-0,0228 \text{ l}$
$\alpha_w$	$0,15 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Rechteck	$200 \text{ l} \cdot \text{K}$	$0,58 \cdot 10^{-3} \text{ l}$
$t_x$	16°C	1,15 K	Rechteck	$-0,0300 \text{ l} \cdot \text{K}^{-1}$	$-0,0346 \text{ l}$
$\kappa_w$	$0,46 \cdot 10^{-6} \text{ kPa}^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-6} \text{ kPa}^{-1}$	Rechteck	$-100 \text{ l} \cdot \text{kPa}$	$-0,29 \cdot 10^{-3} \text{ l}$
$p_x$	500 kPa	29 kPa	Rechteck	$-9,2 \cdot 10^{-6} \text{ l} \cdot \text{kPa}^{-1}$	$-0,0027 \text{ l}$
$p_s$	0,0 Pa	-	-	-	-
$V_x$	199,95 l	0,109 l			

Die dem Ergebnis beizuordnende Standardmessunsicherheit wird deutlich durch den Beitrag der Füllstandsanzeige des Messbehälters dominiert. Endgültig ergibt sich daraus keine Normal- sondern im Wesentlichen eine Rechteckverteilung. Das muss beim weiteren Vorgehen der Ermittlung der Messunsicherheit berücksichtigt werden.

**S12.10 Zähleranzeige ( $\Delta V_{ix}, \delta V_{ix1}, \delta V_{ix2}$ ):** Der zu kalibrierende Wasserzähler hat eine Auflösung von 0,2 l. Daraus ergeben sich die Grenzen von  $\pm 0,1 \text{ l}$  für die maximalen Abweichungen aufgrund der endlichen Auflösung bei beiden Ablesungen.



**S12.11 Messunsicherheitsbudget ( $e_x$ )**

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$\Delta V_{ix}$	200,0 l	-	Nominal	-	-
$\delta V_{ix1}$	0,0 l	0,058 l	Rechteck	$-5,0 \cdot 10^{-3}$	$-0,29 \cdot 10^{-3}$ l
$\delta V_{ix2}$	0,0 l	0,058 l	Rechteck	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$0,29 \cdot 10^{-3}$ l
$V_x$	199,95 l	0,109 l	Normal	$-5,0 \cdot 10^{-3}$	$-0,55 \cdot 10^{-3}$ l
$e_x$	0,000 3	$0,68 \cdot 10^{-3}$			

**S12.12 Reproduzierbarkeit des Zählers:** Die relative Messabweichung der Anzeige des zu kalibrierenden Wasserzählers bei dem eingestellten Durchfluss von 2500 l/h weist eine beträchtliche Streuung auf. Aus diesem Grund wird die relative Messabweichung der Anzeige dreimal bestimmt. Die Ergebnisse der Durchgänge werden in einem Modell für die mittlere Messabweichung der Anzeige  $e_{x\text{av}}$  als unabhängige Beobachtungen  $e_{x_j}$  behandelt:

$$e_{x\text{av}} = e_x + \delta e_x \quad (\text{S12.3})$$

mit

- $e_x$  - relative Messabweichung der Anzeige eines einzelnen Durchgangs,
- $\delta e_x$  - Korrektur der relativen Messabweichung der Anzeige aus den verschiedenen Durchgängen auf Grund der schlechten Wiederholpräzision des Zählers.

**S12.13 Messungen ( $e_x$ ):**

Nr.	beobachtete relative Messabweichung der Anzeige
1	0,000 3
2	0,000 5
3	0,002 2

Arithmetischer Mittelwert  $\bar{e}_x = 0,001$

Empirische Standardabweichung  $s(e_{x_j}) = 0,001$

Standardmessunsicherheit  $u(\bar{e}_x) = s(\bar{e}_x) = \frac{0,001}{\sqrt{3}} = 0,000 60$

**S12.14 Messunsicherheitsbudget ( $e_{X_{av}}$ ):**

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standardmess- unsicherheit $u(x_i)$	eff. Frei- heitsgrade	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$e_x$	0,001	$0,60 \cdot 10^{-3}$	2	Normal	1,0	$0,60 \cdot 10^{-3}$
$\delta e_x$	0,0	$0,68 \cdot 10^{-3}$	$\infty$	Normal	1,0	$0,68 \cdot 10^{-3}$
$e_{X_{av}}$	0,001	$0,91 \cdot 10^{-3}$	10			

**S12.15 Erweiterte Messunsicherheit:** Weil die effektiven Freiheitsgrade der Standardmessunsicherheit, die der mittleren relativen Messabweichung beigeordnet sind, gering sind, muss der Standard-Erweiterungsfaktor gemäß Tabelle E1 geändert werden:

$$U = k \cdot u(e_{X_{av}}) = 2,28 \cdot 0,91 \cdot 10^{-3} \cong 2 \cdot 10^{-3}$$

**S12.16 Vollständiges Messergebnis:** Die für einen Durchfluss von 2500 l/h bestimmte mittlere relative Messabweichung der Anzeige des Wasserzählers beträgt  $0,001 \pm 0,002$ .

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2,28$  ergibt. Sie entspricht bei einer t-Verteilung mit  $\nu_{\text{eff}} = 10$  effektiven Freiheitsgraden einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

**S13 Kalibrierung eines Lehrings mit einem Nenndurchmesser von 90 mm**

**S13.1** Ein Stahllehring mit  $D_x = 90$  mm Nenninnendurchmesser wird nach einem Verfahren kalibriert, das in EA-10/06 (früher EAL-G29) eingeführt worden ist. Verwendet werden ein Längenkomparator des Abbe-Typs und ein Stahleinstellring, dessen Nenninnendurchmesser  $D_s = 40$  mm beträchtlich von dem des zu kalibrierenden Rings abweicht. In diesem Fall übernehmen der Längenkomparator und der Stahleinstellring die Rolle von Gebrauchsnormen. Die Ringe werden vorsichtig nacheinander auf einem Tisch mit vier Freiheitsgraden, der alle Positionierelemente für die Ausrichtung der Prüflinge umfasst, festgeklemmt. Die Ringe werden an mehreren diametral voneinander entfernten Stellen mit zwei C-förmigen Armen, die auf der festen bzw. Messspindel befestigt sind, angetastet. Die C-förmigen Arme sind mit kugeligen Antastspitzen ausgerüstet. Die Messkraft wird von einem Spanngewicht erzeugt, das eine konstante Kraft von nominal 1,5 N über den gesamten Messbereich gewährleistet. Die Messspindel ist starr mit dem Messkopf eines Stahl-Strichmaßstabs mit einer Auflösung von  $0,1 \mu\text{m}$  verbunden. Die Strichteilung des Komparators wird in regelmäßigen Abständen überprüft, um die vom Hersteller spezifizierten Grenzwerte für Messabweichungen<sup>10</sup> (MPE, maximum permissible error) zu bestätigen.

<sup>10</sup> Anm. des Übersetzers: Die Beträge der Grenzwerte für Messabweichungen werden Fehlergrenzen genannt (Internationales Wörterbuch der Metrologie, Hrsg. DIN, 1994, Abschn. 5.21).

Die Umgebungstemperatur wird überwacht, um die für das Kalibrierverfahren genannten Umgebungsbedingungen aufrechtzuerhalten. Die Temperatur im Arbeitsvolumen des Komparators wird innerhalb von  $\pm 0,5$  K auf  $20$  °C gehalten. Es wird darauf geachtet, dass die Ringe und die Strichskala die überwachte Temperatur während der gesamten Kalibrierung beibehalten.

- S13.2** Den Durchmesser  $d_x$  des bei der Referenztemperatur  $t_0 = 20$  °C zu kalibrierenden Rings erhält man aus der Beziehung:

$$d_x = d_s + \Delta l + \delta l_i + \delta l_T + \delta l_P + \delta l_E + \delta l_A \quad (\text{S13.1})$$

mit

- $d_s$  - Durchmesser des Referenzeinstellrings bei Referenztemperatur
- $\Delta l$  - beobachtete Differenz in der Verschiebung der Messspindel, wenn die Antastspitzen die Innenfläche der Ringe an zwei diametral voneinander entfernten Stellen berühren
- $\delta l_i$  - Korrektur für die Messabweichung der Anzeige des Komparators
- $\delta l_T$  - Korrektur für Temperatureffekte des zu kalibrierenden Rings, des Referenzeinstellrings und der Strichskala des Komparators
- $\delta l_P$  - Korrektur für die koaxiale Fehljustierung der Taster in Bezug auf die Messlinie
- $\delta l_E$  - Korrektur für die Differenz in den elastischen Verformungen des zu kalibrierenden Rings und des Referenzeinstellrings
- $\delta l_A$  - Korrektur für die Differenz der Abbe-Fehler des Komparators, wenn die Durchmesser des zu kalibrierenden Rings und des Referenzeinstellrings gemessen werden

- S13.3** **Gebrauchsnormal ( $d_s$ ):** Der Innendurchmesser des als Gebrauchsnormal verwendeten Einstellrings wird im Kalibrierschein zusammen mit der beigeordneten erweiterten Messunsicherheit mit  $40,0007 \text{ mm} \pm 0,2 \mu\text{m}$  (Erweiterungsfaktor  $k = 2$ ) angegeben.

- S13.4** **Komparator ( $\delta l_i$ ):** Die Korrekturen für die Messabweichung der Strichskala wurden vom Hersteller bestimmt und elektronisch eingespeichert. Verbleibende Restbeiträge liegen in den vom Hersteller angegebenen Grenzen von  $\pm (0,3 \mu\text{m} + 1,5 \cdot 10^{-6} \cdot l_i)$ , wobei  $l_i$  die angezeigte Länge ist. Die Einhaltung der Spezifikationen wird durch periodische Überprüfungen gesichert. Für die tatsächliche Längendifferenz  $D_x - D_s = 50 \text{ mm}$  werden unbekannte Restbeiträge auf innerhalb von  $\pm 0,375 \mu\text{m}$  geschätzt.

- S13.5** **Temperaturkorrekturen ( $\delta l_T$ ):** Während der gesamten Messung wird sorgfältig darauf geachtet, dass der zu kalibrierende Ring, der Einstellring und die Komparatorskala die überwachte Temperatur beibehalten. Auf Grund früherer Messungen und allgemeiner Erfahrungen mit dem Messsystem ist man sich sicher, dass die Abweichungen der Temperaturen des zu kalibrierenden Rings, des Einstellrings und der Komparatorskala von der Umgebungstemperatur innerhalb von  $\pm 0,2$  K bleiben. Die

Umgebungstemperatur im Messraum wird jedoch auf innerhalb  $\pm 0,5$  K geschätzt. Die Kenntnis der Messung wird daher am besten durch die Abweichung der Umgebungstemperatur von der Referenztemperatur und die Abweichungen der Temperaturen des zu kalibrierenden Rings, des Einstellrings und der Komparatorskala (Lineal) von der Umgebungstemperatur beschrieben. Die Korrektur  $\delta l_e$  für Temperatureinflüsse wird aus dem Teilmodell der Auswertung

$$\begin{aligned} \delta l_T = & (D_S \cdot (\alpha_S - \alpha_R) - D_X \cdot (\alpha_X - \alpha_X)) \cdot \Delta t_A \\ & + D_S \cdot \alpha_S \cdot \delta t_S - D_X \cdot \alpha_X \cdot \delta t_X - (D_S - D_X) \cdot \alpha_R \cdot \delta t_R \end{aligned} \quad (\text{S13.2})$$

bestimmt, wobei

- $D_X, D_S$  - Nenndurchmesser des zu kalibrierenden Rings und des Referenzeinstellrings
- $\alpha_X, \alpha_S, \alpha_R$  - Längenausdehnungskoeffizienten des zu kalibrierenden Rings, des Referenzeinstellrings und der Komparator-Strichskala
- $\Delta t_A = t_A - t_0$  - Abweichungen der Umgebungstemperatur des Messraums von der Referenztemperatur  $t_0 = 20$  °C
- $\delta t_X, \delta t_S, \delta t_R$  - Abweichungen der Temperatur des zu kalibrierenden Rings, des Referenzeinstellrings und der Komparator-Strichskala von der Umgebungstemperatur

Da die Erwartungswerte der vier in Gl. (S13.2) eingehenden Temperaturdifferenzen gleich Null sind, erfasst die übliche linearisierte Version keine Effekte der mit den Werten der drei Längenausdehnungskoeffizienten verbundenen Messunsicherheit. Wie in Abschnitt S4.13 dargestellt, muss die nichtlineare Version benutzt werden, um die mit den vier Produkttermen verbundene Standardunsicherheit zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \delta l_{TA} &= (D_S \cdot (\alpha_S - \alpha_R) - D_X \cdot (\alpha_X - \alpha_X)) \cdot \Delta t_A \\ \delta l_{TS} &= D_S \cdot \alpha_S \cdot \delta t_S \\ \delta l_{TX} &= D_X \cdot \alpha_X \cdot \delta t_X \\ \delta l_{TR} &= (D_S - D_X) \cdot \alpha_R \cdot \delta t_R \end{aligned} \quad (\text{S13.3})$$

Auf der Grundlage des Kalibrierscheins für den Einstellring und der Herstellerdaten für den zu kalibrierenden Ring und die Komparatorskala wird angenommen, dass die Längenausdehnungskoeffizienten in dem Intervall  $(11,5 \pm 1,0) \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  liegen. Bei diesem Wert und den am Anfang angegebenen Grenzen der Temperaturänderung sind die den vier Produktgliedern beigeordneten Standardmessunsicherheiten  $u(\delta l_{TA}) = 0,012 \mu\text{m}$ ,  $u(\delta l_{TS}) = 0,053 \mu\text{m}$ ,  $u(\delta l_{TX}) = 0,12 \mu\text{m}$  und  $u(\delta l_{TR}) = 0,066 \mu\text{m}$ . Aus diesen Werten wird die den kombinierten Temperaturkorrekturen beigeordnete Standardmessunsicherheit mit Hilfe des folgenden Unter-Messunsicherheitsbudgets abgeleitet:

Größe	Schätzwert	Standardmessunsicherheit	Verteilung	Sensitivitätskoeffizient	Unsicherheitsbeitrag
$X_i$	$x_i$	$u(x_i)$		$c_i$	$u_i(y)$
$\delta l_{TA}$	0,0 $\mu\text{m}$	0,012 $\mu\text{m}$	-	1,0	0,012 $\mu\text{m}$
$\delta l_{TS}$	0,0 $\mu\text{m}$	0,053 $\mu\text{m}$	-	1,0	0,053 $\mu\text{m}$
$\delta l_{TX}$	0,0 $\mu\text{m}$	0,12 $\mu\text{m}$	-	1,0	0,12 $\mu\text{m}$
$\delta l_{TR}$	0,0 $\mu\text{m}$	0,066 $\mu\text{m}$	-	1,0	0,066 $\mu\text{m}$
$\delta l_T$	0,0 $\mu\text{m}$	0,15 $\mu\text{m}$			

**S13.6 Koaxialitätskorrektur ( $\delta l_p$ ):** Die Koaxialitätsabweichung der zwei kugelförmigen Aufnehmer und die Messlinie werden als innerhalb von  $\pm 20 \mu\text{m}$  liegend angenommen. Mit den in dem mathematischen Hinweis (S13.13) angegebenen Gleichungen sind die Korrektur für eine mögliche Nichtaxialität und die zugehörige Standardmessunsicherheit gegeben durch:

$$\delta l_p = 2 \cdot \left( \frac{1}{D_x} - \frac{1}{D_s} \right) \cdot u^2(\delta c) \quad (\text{S13.4})$$

$$u^2(\delta l_p) = \frac{16}{5} \cdot \left( \frac{1}{D_x^2} + \frac{1}{D_s^2} \right) \cdot u^4(\delta c) \quad (\text{S13.5})$$

Hier ist  $\delta c$  der kleine Abstand der gemessenen Sehne vom Ringmittelpunkt. Die sich für die Korrektur und die zugehörige Standardmessunsicherheit ergebenden Werte sind  $\delta l_p \cong -0,004 \mu\text{m}$  und  $u(\delta l_p) \cong 0,0065 \mu\text{m}$ . Wie aus dem Messunsicherheitsbudget (S13.10) ersichtlich ist, sind diese Werte zwei Größenordnungen kleiner als die verbleibenden Unsicherheitsbeiträge, so dass ihr Einfluss unter den vorliegenden Messbedingungen nicht berücksichtigt zu werden braucht.

**S13.7 Korrektur für elastische Verformung ( $\delta l_E$ ):** Die elastische Verformung des zu kalibrierenden Rings oder des Referenzeinstellrings wird während der laufenden Messung nicht bestimmt. Auf der Grundlage früherer Erfahrungen werden die sich aus elastischen Verformungen ergebenden Effekte jedoch auf innerhalb  $\pm 0,03 \mu\text{m}$  geschätzt.

**S13.8 Abbe-Fehler-Korrektur ( $\delta l_A$ ):** Die tatsächlichen Werte der Abbe-Fehler des Komparators werden nicht während der laufenden Messung bestimmt. Auf der Grundlage von Erfahrungen und von Daten periodischer Überprüfungen des Komparators werden die Effekte von Abbe-Fehlern jedoch auf innerhalb  $\pm 0,02 \mu\text{m}$  geschätzt.

**S13.9 Messungen ( $\Delta l$ ):** Die folgenden Beobachtungen werden in Bezug auf den unbekannten Ring und den Einstellring gemacht:

Nr	Messobjekt	Beobachtung	Messgröße
1	Referenz-Einstellring	0 bei diesem Schritt wird die Anzeige auf Null gesetzt	Durchmesser in Nennrichtung der Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse
2	zu kalibrierender Ring	49,99935 mm	Durchmesser in Nennrichtung der Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse
3	zu kalibrierender Ring	49,99911 mm	Durchmesser in der Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse, in Bezug auf die Nennrichtung um +1 mm auf dem Umfang um die Achse gedreht
4	zu kalibrierender Ring	49,99972 mm	Durchmesser in der Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse, in Bezug auf die Nennrichtung um -1 mm auf dem Umfang um die Achse gedreht
5	zu kalibrierender Ring	49,99954 mm	Durchmesser in Nennrichtung, um 1 mm nach oben verschoben zur Ebene parallel zur Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse
6	zu kalibrierender Ring	49,99996 mm	Durchmesser in Nennrichtung, um 1 mm nach unten verschoben zur Ebene parallel zur Symmetrieebene orthogonal zur Zylinderachse

Die Beobachtungen können in zwei Gruppen eingeteilt werden: die Beobachtung des Durchmessers des Einstellrings (Beobachtung Nr. 1), die dazu dient, die Komparatoranzeige auf Null zu setzen, und die Beobachtung des Durchmessers des zu kalibrierenden Rings (Beobachtungen Nr. 2 bis 6), die die Differenz zwischen den Durchmessern angeben:

Arithmetisches Mittel

$$\overline{\Delta l} = 49,999\ 54\ \text{mm}$$

Standardabweichung einer Einzelbeobachtung

$$s(\Delta l) = 0,33\ \mu\text{m}$$

Standardabweichung des Mittelwerts

$$s(\overline{\Delta l}) = \frac{s(\Delta l)}{\sqrt{5}} = 0,15\ \mu\text{m}$$

Die Standardabweichung einer Einzelbeobachtung  $s(\Delta l) = 0,33\ \mu\text{m}$  berücksichtigt Effekte von Formabweichungen des zu kalibrierenden Rings sowie der Wiederholbarkeit des Komparators. Um die zu der beobachteten mittleren Durchmesserdifférenz gehörige Standardabweichung zu erhalten, muss auch die sich aus der Nullstellung der Komparatoranzeige ergebende Unsicherheit berücksichtigt werden. Diese wird aus der zusammengefassten empirischen Standardabweichung  $s_p(0) = 0,25\ \mu\text{m}$  abgeleitet, die in einer früheren Messung unter denselben Messbedingungen erzielt

worden ist. Die sich daraus ergebende Standardmessunsicherheit für die beobachtete Durchmesserdifferenz ist

$$u(\Delta l) = \sqrt{s^2(\Delta l) + s_p^2(0)} = 0,30 \mu\text{m}$$

**S13.10 Messunsicherheitsbudget ( $d_x$ ):**

Größe $X_i$	Schätzwert $x_i$	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient $c_i$	Unsicher- heitsbeitrag $u_i(y)$
$d_s$	40,000 7 mm	0,10 $\mu\text{m}$	Normal	1,0	0,10 $\mu\text{m}$
$\Delta l$	49,999 55 mm	0,30 $\mu\text{m}$	Normal	1,0	0,30 $\mu\text{m}$
$\delta l_i$	0,0 mm	0,22 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	0,22 $\mu\text{m}$
$\delta l_T$	0,0 mm	0,15 $\mu\text{m}$	Normal	1,0	0,15 $\mu\text{m}$
$\delta l_p$	0,000 004 mm	0,0065 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	0,007 $\mu\text{m}$
$\delta l_E$	0,0 mm	0,018 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	0,018 $\mu\text{m}$
$\delta l_A$	0,0 mm	0,012 $\mu\text{m}$	Rechteck	1,0	0,012 $\mu\text{m}$
$d_x$	90,000 25 mm	0,414 $\mu\text{m}$			

**S13.11 Erweiterte Messunsicherheit:**

$$U = k \cdot u(d_x) = 2 \cdot 0,414 \mu\text{m} \cong 0,9 \mu\text{m}$$

**S13.12 Vollständiges Messergebnis**

Der Durchmesser des Lehrings beträgt (90,000 3  $\pm$  0,000 9) mm.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$  ergibt. Sie entspricht bei Normalverteilung einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

**S13.13 Mathematischer Hinweis zur Nichtaxialität:** Da es nicht möglich ist, die Ringe in Bezug auf die Messachse des Komparators genau auszurichten, ist die bei der Messung ermittelte Größe eine Sehne des betreffenden Rings in der Nähe seines Durchmessers. Die Länge  $d'$  dieser Sehne, die bei der Messung beobachtet wird, steht mit dem Ringdurchmesser  $d$  wie folgt in Beziehung:

$$d' = d \cdot \cos(\delta\varphi) \cong d \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(\delta\varphi)^2\right) \tag{S13.6}$$



wobei  $\delta\varphi$  der kleine Winkel ist, der den halben Mittelpunktswinkel der Sehne zu  $\pi/2$  ergänzt. Dieser Winkel steht andererseits zu dem kleinen Abstand  $\delta c$  der Sehne vom Mittelpunkt des Rings in Beziehung:

$$\delta c = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \sin(\delta\varphi) \cong \frac{1}{2} \cdot d \cdot \delta\varphi \quad (\text{S13.7})$$

so dass Gl. (S13.6) wie folgt geschrieben werden kann:

$$d' \cong d - 2 \frac{(\delta c)^2}{D} \quad (\text{S13.8})$$

wobei der Durchmesser  $d$  des Rings in dem Verhältnis durch seinen Nenndurchmesser  $D$  ersetzt worden ist, da der Nenner des Verhältnisses bereits eine kleine Größe ist. Die beste Durchmesserereinschätzung erzielt man, indem man den Erwartungswert der letzten Beziehung als

$$d = d' + 2 \frac{u^2(\delta c)}{D} \quad (\text{S13.9})$$

auffasst.

Hier ist zu berücksichtigen, dass der kleine Abstand  $\delta c$  einen Erwartungswert von Null hat. Es muss auch berücksichtigt werden, dass die Bedeutung von  $d$ ,  $d'$  und  $\delta c$  in Gl. (S13.8) und (S13.9) nicht identisch ist; während diese Symbole in Gl. (S13.8) die nicht genau bekannten Größen oder Zufallsvariablen darstellen, stehen sie in Gl. (S13.9) für die Erwartungswerte dieser Größen. Da die Varianz einer Zufallsvariablen gleich dem Erwartungswert des Quadrats seiner Abweichung von dem betreffenden Erwartungswert ist, ist das Quadrat der Standardmessunsicherheit für den Durchmesser des Rings gemäß Gl. (S13.8)

$$u^2(d) = u^2(d') + 4 \cdot (\alpha - 1) \frac{u^4(\delta c)}{D^2} \quad (\text{S13.10})$$

wobei

$$\alpha = \frac{m_4(\delta c)}{m_2^2(\delta c)} \quad (\text{S13.11})$$

das Verhältnis des zentrierten Moments vierter Ordnung zum Quadrat des zentrierten Moments zweiter Ordnung des kleinen Abstands  $\delta c$  ist. Dieses Verhältnis hängt von der Verteilung ab, die für  $\delta c$  angenommen wird. Sie nimmt den Wert  $\alpha = 9/5$  an, wenn  $\delta c$  als rechteck verteilt angenommen wird, so dass in diesem Fall die Standardmessunsicherheit für den Durchmesser ausgedrückt wird durch

$$u^2(d) = u^2(d') + \frac{16}{5} \cdot \frac{u^4(\delta c)}{D^2} \quad (\text{S13.12})$$