
DKD-3-E1

**Angabe der Messunsicherheit
bei Kalibrierungen**

Ergänzung 1 - Beispiele

Herausgegeben von der Akkreditierungsstelle des Deutschen Kalibrierdienstes (DKD) bei der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB).

Copyright © 2002 by DKD

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Deutscher Kalibrierdienst (DKD)

Im DKD sind Kalibrierlaboratorien von Industrieunternehmen, Forschungsinstituten, technischen Behörden, Überwachungs- und Prüfinstitutionen zusammengeschlossen. Sie werden von der Akkreditierungsstelle des DKD bei der PTB akkreditiert und überwacht. Sie führen Kalibrierungen von Messgeräten und Maßverkörperungen für die bei der Akkreditierung festgelegten Messgrößen und Messbereiche durch. Die von ihnen ausgestellten DKD-Kalibrierscheine sind ein Nachweis für die Rückführung auf nationale Normale, wie sie von der Normenfamilie DIN EN ISO 9000 und der DIN EN ISO/IEC 17025 gefordert wird.

Kalibrierungen durch DKD-Laboratorien geben dem Anwender Sicherheit für die Verlässlichkeit von Messergebnissen, erhöhen das Vertrauen der Kunden und die Wettbewerbsfähigkeit auf dem nationalen und internationalen Markt und dienen als messtechnische Grundlage für die Mess- und Prüfmitelüberwachung im Rahmen von Qualitätssicherungsmaßnahmen.

Im DKD werden Kalibriermöglichkeiten für elektrische Messgrößen, für Länge, Winkel und weitere geometrische Größen, für Rauheit, Koordinaten- und Formmesstechnik, für Zeit und Frequenz, für Kraft, Drehmoment, Beschleunigung, Druck, Durchfluss, Temperatur, Feuchte, medizinische Messgrößen, akustische Messgrößen, optische Messgrößen, ionisierende Strahlung und weitere Messgrößen angeboten.

Veröffentlichungen: siehe Internet

Anschrift:

Deutscher Kalibrierdienst bei der
Physikalisch-Technischen Bundesanstalt
Bundesallee 100, D-38116 Braunschweig
Postfach 33 45, D-38023 Braunschweig
Telefon Sekretariat: (05 31) 5 92-19 01
Fax: (05 31) 5 92-19 05
E-Mail: dkd@ptb.de
Internet: www.dkd.info

**Übersetzung des Abschnittes Supplement 1, Examples der Publikation EA-4/02,
„Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration“, Dez. 1999**

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
S1 Einleitung	4
S2 Kalibrierung eines Gewichtsstückes mit dem Nennwert 10 kg	5
S3 Kalibrierung eines 10 k Ω Normalwiderstandes	7
S4 Kalibrierung eines Endmaßes der Nennlänge 50 mm	10
S5 Kalibrierung eines Typ-N-Thermopaars bei 1000 °C	15
S6 Kalibrierung eines Leistungsmesskopfes bei der Frequenz von 18 GHz	20
S7 Kalibrierung eines schaltbaren koaxialen Dämpfungsgliedes für einen Dämpfungsschritt von 30 dB	24

Nationales Vorwort

Die Schrift DKD-3-E-1 ergänzt die Schrift DKD-3, Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen. DKD-3-E1 ist die deutsche Übersetzung des im Dezember 1999 erschienenen Supplement 1 der Publikation EA-4/02, Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration. Sie basiert auf der ersten Fassung von DKD-3-E1 und Supplement 1 von EA-4/02 (damals EAL-R2), die im Oktober 1998 bzw. im April 1997 erschienen ist.

Die vorliegende geänderte Neuauflage enthält ein aktualisiertes Impressum, aktualisierte Bezüge und redaktionelle Änderungen.

Die Beispielsammlung soll die Umsetzung der in DKD-3 dargestellten Methode zur Ermittlung der Messunsicherheit erleichtern.

Zusätzliche Beispiele aus den Kalibrierlaboratorien und den Fachausschüssen des DKD sind weiterhin willkommen.

geänderte Neuauflage: 09/2002

S1 Einleitung

- S1.1** Die folgenden Beispiele verdeutlichen die mathematischen Verfahren, die bei der Bestimmung der Messunsicherheit eingesetzt werden. Stärker an der Praxis orientierte Beispiele müssen in Zukunft auf der Grundlage entsprechender Modelle von speziellen Arbeitsgruppen in den verschiedenen Fachdisziplinen entwickelt werden. Die hier zusammengestellten Beispiele liefern dennoch einen allgemeinen Überblick darüber, wie bei einer Bestimmung der Messunsicherheit vorzugehen ist.
- S1.2** Die Beispiele wurden aus Entwürfen entwickelt, die von einzelnen EA-Fachausschüssen bereitgestellt worden sind. Diese Entwürfe sind vereinfacht und aufeinander abgestimmt worden, damit sie von den Fachkräften in allen Kalibrierlaboratorien nachvollzogen werden können. Die Vereinfachungen und Abstimmungen wurden mit dem Ziel unternommen, dass die Gruppe der Beispiele insgesamt zu einem besseren Verständnis der für die Entwicklung eines Modells der Auswertung erforderlichen Konzepte beiträgt und die Vereinheitlichung der Bestimmung der Messunsicherheit unabhängig von dem jeweiligen Fachgebiet fördert.
- S1.3** Die in den Beispielen angegebenen Unsicherheitsbeiträge und Messwerte stellen keine verbindlichen oder typischen Anforderungen dar. Die einzelnen Laboratorien sind vielmehr aufgefordert, die Unsicherheitsanteile auf der Grundlage der Modellfunktion zu bestimmen, die sie für die Auswertung der von ihnen durchgeführten Kalibrierung verwenden, und die so ermittelte Messunsicherheit auf den von ihnen ausgestellten Kalibrierscheinen anzugeben. In allen Beispielen sind die in Abschnitt 5 angegebenen Bedingungen erfüllt, so dass der Standarderweiterungsfaktors $k = 2$ verwendet ist.
- S1.4** Entsprechend dem in Abschnitt 7 des Dokuments EA-4/02 angegebenen Verfahren zur schrittweisen Bestimmung der Messunsicherheit folgt die Darstellung der Beispiele dem folgenden Schema:
- ein kurzer beschreibender Titel
 - eine allgemeine Beschreibung des Messvorgangs
 - das Modell der Auswertung mit einer Liste der verwendeten Zeichen und Symbole
 - eine ausführliche Liste der Eingangsdaten mit einer kurzen Beschreibung, wie sie gewonnen worden sind
 - die Liste der Beobachtungen und die Berechnung der statistischen Parameter
 - ein Messunsicherheitsbudget in Tabellenform
 - die erweiterte Messunsicherheit
 - das im Kalibrierschein anzugebende vollständige Messergebnis.
- S1.5** Dieser ersten Ergänzung von EA-4/02 werden weitere Ergänzungen mit neuen ausgearbeiteten Beispielen folgen, die unter anderem auch die Bestimmung der Messunsicherheit bei der Kalibrierung von Geräten behandeln werden. Beispiele hierzu finden sich auch in den EA Leitfäden zur Kalibrierung spezieller Messgerätetypen.

S2 Kalibrierung eines Gewichtsstückes mit dem Nennwert 10 kg

S2.1 Die Kalibrierung eines Gewichtsstückes mit einem Nennwert von 10 kg der OIML-Klasse M1 wird durch Vergleich mit einem Referenznormal (OIML-Klasse F2) mit dem gleichen Nennwert unter Verwendung einer Wägeeinrichtung durchgeführt, deren messtechnische Charakteristika zuvor ermittelt worden sind.

S2.2 Der konventionelle Wägewert m_x ergibt sich aus:

$$m_x = m_s + \delta m_D + \delta m + \delta m_C + \delta B \quad (\text{S2.1})$$

mit:

- m_s - konventioneller Wägewert des Referenznormals
- δm_D - Drift des konventionellen Wägewertes des Referenznormals seit seiner letzten Kalibrierung
- δm - beobachtete Wägedifferenz zwischen dem zu kalibrierenden Gewichtsstück und dem Referenznormal
- δm_C - Korrektur bezüglich exzentrischer Belastung und magnetischer Effekte
- δB - Korrektur bezüglich des Luftauftriebes

S2.3 Referenznormal (m_s): Der Kalibrierschein gibt für das Referenznormal einen Wägewert von 10 000,005 g mit einer beigeordneten erweiterten Messunsicherheit von 45 mg (Erweiterungsfaktor $k = 2$) an.

S2.4 Drift des Wertes des Referenznormals (δm_D): Die Drift des Wägewertes des Referenznormals wird aus früheren Kalibrierungen auf Null mit einer maximalen Abweichung von ± 15 mg geschätzt.

S2.5 Wägeeinrichtung ($\delta m, \delta m_C$): Aus einer früheren Ermittlung der Wiederholbarkeit der Differenz der konventionellen Wägewerte zweier Gewichtsstücke des gleichen Nennwertes mit der benutzten Wägeeinrichtung ergibt sich ein zusammengefasster Schätzwert der Standardabweichung von 25 mg. Eine Korrektur bezüglich der Kalibrierung der Wägeeinrichtung wird nicht vorgenommen; Abweichungen bezüglich einer exzentrischen Belastung und magnetischer Effekte wird durch eine Rechteckverteilung mit den Grenzen von ± 10 mg abgeschätzt.

S2.6 Luftauftrieb (δB): Für den Luftauftrieb wird keine Korrektur angebracht; die Grenzen der hieraus resultierenden Abweichungen werden auf $\pm 1 \cdot 10^{-6}$ des Nennwertes geschätzt.

S2.7 Korrelation: Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.

S2.8 Beobachtungen (δm): Die Wägedifferenz zwischen dem zu kalibrierenden Gewichtsstück und dem Referenznormal wird nach der Substitutionsmethode mit dem Wägezyklus ABBA bestimmt. Es wurden drei Beobachtungen durchgeführt:

Nr.	Konventioneller Wägewert	Anzeige	Beobachtete Differenz
1	Referenznormal	+0,010 g	
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,020 g	
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,025 g	
2	Referenznormal	+0,015 g	+0,01 g
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,025 g	
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,050 g	
3	Referenznormal	+0,020 g	+0,03 g
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,025 g	
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,045 g	
	Referenznormal	+0,020 g	+0,02 g
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,040 g	
	zu kalibrierendes Gewichtsstück	+0,020 g	

Arithmetischer Mittelwert:

$$\overline{\delta m} = 0,020 \text{ g}$$

Zusammengefasster Schätzwert der Standardabweichung:

$$s_p(\delta m) = 25 \text{ mg}$$

(aus früheren Ermittlungen)

Standardmessunsicherheit:

$$u(\delta m) = s(\overline{\delta m}) = \frac{25 \text{ mg}}{\sqrt{3}} = 14,4 \text{ mg}$$

S2.9 Messunsicherheitsbudget (m_x):

Größe	Schätzwert	Standard- messunsicherheit	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient	Unsicherheits- beitrag
X_i	x_i	$u(x_i)$		c_i	$u_i(y)$
m_s	10 000,005 g	22,5 mg	Normal	1,0	22,5 mg
δm_D	0,000 g	8,66 mg ¹	Rechteck	1,0	8,665 mg ¹
δm	0,020 g	14,4 mg	Normal	1,0	14,4 mg
δm_C	0,000 g	5,77 mg	Rechteck	1,0	5,77 mg
δB	0,000 g	5,77 mg	Rechteck	1,0	5,77 mg
m_x	10 000,025 g				29,3 mg

S2.10 Erweiterte Messunsicherheit

$$U = k \cdot u(m_x) = 2 \cdot 29,3 \text{ mg} \cong 59 \text{ mg}$$

¹ Im Originaltext von EA-4/02 steht hier ein falscher Wert.

S2.11 Vollständiges Messergebnis

Der ermittelte konventionelle Wägewert des Gewichtsstücks mit dem Nennwert 10 kg beträgt 10,000 025 kg ±59 mg.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

S3 Kalibrierung eines 10 kΩ Normalwiderstandes

S3.1 Der Widerstand eines Vierpol-Normalwiderstandes wird nach der Substitutionsmethode durch Vergleich mit einem als Referenznormal wirkenden, kalibrierten Vierpol-Normalwiderstand desselben Nennwertes unter Zuhilfenahme eines 7½-stelligen Digitalmultimeters im Widerstandsmessbereich bestimmt. Die Widerstände befinden sich in einem gut gerührten Ölbad, dessen Temperatur von 23 °C mit einem zentrisch angeordneten Quecksilberthermometer registriert wird. Vor der Messung wird den Widerständen ausreichend Zeit gelassen, sich thermisch zu stabilisieren. Die Vierpolanschlüsse der einzelnen Widerstände werden nacheinander mit den Klemmen des DMM verbunden. Es ist überprüft worden, dass bei dem Messstrom von 100 μA im 10 kΩ-Messbereich des DMM nennenswerte Effekte durch Eigenerwärmung der Widerstände nicht auftreten. Das Messverfahren stellt auch sicher, dass sich äußere Leckwiderstände nur unwesentlich auf das Messergebnis auswirken.

S3.2 Der Widerstandswert R_X des zu kalibrierenden Widerstandes ergibt sich aus der Beziehung:

$$R_X = (R_S + \delta R_D + \delta R_{TS}) r_C r - \delta R_{TX} \quad (\text{S3.1})$$

mit:

- R_S - Wert des Referenzwiderstandes
- δR_D - Drift des Wertes des Referenzwiderstandes seit seiner letzten Kalibrierung
- δR_{TS} - temperaturabhängige Widerstandsänderung des Referenzwiderstandes
- $r = R_{iX} / R_{iS}$ - Verhältnis der angezeigten Werte (der Index i bedeutet "angezeigt") des zu kalibrierenden Widerstandes und des Referenzwiderstandes
- r_C - Korrektionsfaktor für Störspannungen und das Auflösungsvermögen des Digitalmultimeters
- δR_{TX} - temperaturabhängige Widerstandsänderung des zu kalibrierenden Widerstandes

- S3.3 Referenznormal (R_S):** Der Kalibrierschein des Referenznormals gibt einen Widerstandswert von $10\,000,053\ \Omega \pm 5\ \text{m}\Omega$ (Erweiterungsfaktor $k = 2$) bei der Bezugstemperatur von $23\ ^\circ\text{C}$ an.
- S3.4 Drift des Widerstandswertes des Referenznormals (δR_D):** Die Drift des Widerstandswertes des Referenzwiderstandes seit seiner letzten Kalibrierung wird aus seiner Kalibrierungsgeschichte auf $+20\ \text{m}\Omega$ mit Abweichungen innerhalb von $\pm 10\ \text{m}\Omega$ geschätzt.
- S3.5 Temperaturkorrekturen ($\delta R_{TX}, \delta R_{TS}$):** Die Temperatur des Ölbad es wird mit einem kalibrierten Thermometer zu $23,00\ ^\circ\text{C}$ registriert. Unter Berücksichtigung der messtechnischen Charakteristika des verwendeten Thermometers und der Temperaturgradienten im Ölbad wird geschätzt, dass die Temperatur der Widerstände innerhalb von $\pm 0,055\ \text{K}$ mit der registrierten Temperatur übereinstimmt. Damit ergibt der bekannte Wert $5 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$ des Temperaturkoeffizienten (TK) des Referenzwiderstandes die Grenzen von $\pm 2,75\ \text{m}\Omega$ für Abweichungen vom kalibrierten Widerstandswert, die auf mögliche Abweichungen von der gemessenen Badtemperatur zurückzuführen sind. Aufgrund der Herstellerangaben wird geschätzt, dass der TK des unbekannt en Widerstandes nicht größer als $10 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$ ist, so dass Widerstandsabweichungen des zu kalibrierenden Widerstandes aufgrund möglicher Temperaturabweichungen auf maximal $\pm 5,5\ \text{m}\Omega$ geschätzt werden.
- S3.6 Widerstandsmessungen (r, r_C):** Da für die Beobachtung von R_{iX} und R_{iS} dasselbe DMM verwendet wird, sind die Unsicherheitsbeiträge korreliert. Dieser Effekt führt, da das Verhältnis der Widerstände auftritt zu einer Verringerung des Unsicherheitsbeitrages, indem nur die relative Differenz zwischen den Widerstandsanzeigen, die ihre Ursache in systematischen Effekten wie Störspannungen und Geräteauflösung haben, berücksichtigt werden müssen (siehe mathematische Anmerkung in Abschnitt S3.12). Die Abweichungen für diese Effekte werden für die einzelnen Anzeigen mit $\pm 0,5 \cdot 10^{-6}$ abgeschätzt. Für das Verhältnis r_C ergibt sich eine Dreieckverteilung mit dem Erwartungswert von $1,000\,000\,0$ und Grenzen von $\pm 1,0 \cdot 10^{-6}$.
- S3.7 Korrelation:** Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.
- S3.8 Beobachtungen (r):** Das Verhältnis r ist fünfmal beobachtet worden:

Nr.	Beobachtetes Verhältnis
1	1,000 010 4
2	1,000 010 7
3	1,000 010 6
4	1,000 010 3
5	1,000 010 5

Arithmetischer Mittelwert:	$\bar{r} = 1,000\ 010\ 5$
Empirische Standardabweichung:	$s(r) = 0,158 \cdot 10^{-6}$
Standardmessunsicherheit:	$u(r) = s(\bar{r}) = \frac{0,158 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{5}} = 0,0707 \cdot 10^{-6}$

S3.9 Messunsicherheitsbudget (R_X):

Größe X_i	Schätzwert x_i	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient c_i	Unsicherheits- beitrag $u(y)$
R_S	10 000,053 Ω	2,5 m Ω	Normal	1,0	2,5 m Ω
δR_D	0,020 Ω	5,8 m Ω	Rechteck	1,0	5,8 m Ω
δR_{TS}	0,000 Ω	1,6 m Ω	Rechteck	1,0	1,6 m Ω
δR_{TX}	0,000 Ω	3,2 m Ω	Rechteck	1,0	3,2 m Ω
r_C	1,000 000 0	$0,41 \times 10^{-6}$	Dreieck	10 000 Ω	4,1 m Ω
r	1,000 010 5	$0,07 \times 10^{-6}$	Normal	10 000 Ω	0,7 m Ω
R_X	10 000,178 Ω				8,33 m Ω

S3.10 Erweiterte Messunsicherheit

$$U = k \cdot u(R_X) = 2 \cdot 8,33 \text{ m}\Omega \cong 17 \text{ m}\Omega$$

S3.11 Vollständiges Messergebnis:

Der gemessene Wert des 10 k Ω Widerstandes bei einer Messtemperatur von 23,00 $^{\circ}\text{C}$ und einem Messstrom von 100 μA beträgt (10 000,178 \pm 0,017) Ω .

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

S3.12 Mathematische Anmerkung zur Standardmessunsicherheit des Verhältnisses der angezeigten Widerstandswerte: Der zu kalibrierende Widerstand und der Referenzwiderstand besitzen nahezu den gleichen Widerstandswert. Innerhalb der üblichen, in den Abweichungen linearen Näherung ergeben sich die Werte, die die DMM-Anzeigen R_{iX} und R_{iS} hervorrufen durch

$$\begin{aligned} R_X' &= R_{iX} \left(1 + \frac{\delta R_X'}{R}\right) \\ R_S' &= R_{iS} \left(1 + \frac{\delta R_S'}{R}\right) \end{aligned} \quad (\text{S3.2})$$

wobei R der Nennwert der Widerstände und $\delta R_X'$ und $\delta R_S'$ die unbekanntenen Abweichungen sind. Das aus diesen Ausdrücken abgeleitete Widerstandsverhältnis ist

$$\frac{R_X'}{R_S'} = r r_C \quad (\text{S3.3})$$

Hier tritt das Verhältnis der angezeigten Werte des zu kalibrierenden Widerstandes und des Referenzwiderstandes

$$r = \frac{R_X}{R_S} \quad (\text{S3.4})$$

so wie der Korrektionsfaktor (lineare Näherung in den Abweichungen)

$$r_C = 1 + \frac{\delta R_X' - \delta R_S'}{R} \quad (\text{S3.5})$$

auf. Da in Gl. (S3.5) die Differenz der Abweichungen vorkommt, haben korrelierte Beiträge der systematischen Effekte, die sich aus der Kalibrierung des DMM ergeben, keinen Einfluss auf das Ergebnis. Die Standardmessunsicherheit des Korrektionsfaktors wird allein durch die unkorrelierten Abweichungen bestimmt, die sich aus den Störeffekten und der Auflösung des DMM ergeben. Unter der Annahme, dass $u(\delta R_X') \cong u(\delta R_S') \cong u(\delta R')$, ergibt sich die Standardmessunsicherheit durch folgenden Ausdruck :

$$u^2(r_C) = 2 \frac{u^2(\delta R')}{R^2} \quad (\text{S3.6})$$

S4 Kalibrierung eines Endmaßes der Nennlänge 50 mm

S4.1 Die Kalibrierung eines Endmaßes der Toleranzklasse 0 (ISO 3650) mit einer Nennlänge von 50 mm erfolgt durch Vergleich mit Hilfe eines Längenkomparators und eines kalibrierten Endmaßes derselben Nennlänge, das aus demselben Material wie das zu kalibrierende Endmaß gefertigt ist, als Referenznormal. Die Mittenmaßdifferenz wird in vertikaler Positionierung der beiden Endmaße mit zwei hochauflösenden Tastern bestimmt, die jeweils die obere und die untere Messfläche berühren. Die tatsächliche Länge l_X' des zu kalibrierenden Endmaßes ergibt sich aus der tatsächlichen Länge l_S' des Referenznormales entsprechend der Gleichung:

$$l_X' = l_S' + \delta l \quad (\text{S4.1})$$

wobei δl die ermittelte Längendifferenz ist. l_X' und l_S' sind die Längen der Endmaße unter den Messbedingungen, insbesondere bei einer Temperatur, die aufgrund der Unsicherheit der Messung der Labortemperatur i. Allg. nicht mit der Bezugstemperatur für Längenmessungen übereinstimmt.

S4.2 Die Länge l_X des zu kalibrierenden Endmaßes bei der Bezugstemperatur ergibt sich aus der Beziehung:

$$l_x = l_s + \delta l_D + \delta l + \delta l_C - L(\bar{\alpha} \cdot \delta t + \delta \alpha \cdot \Delta \bar{t}) - \delta l_V \quad (\text{S4.2})$$

mit:

l_s	- Länge des Referenzendmaßes bei der Bezugstemperatur $t_0 = 20 \text{ °C}$ gemäß seinem Kalibrierschein
δl_D	- Längenänderung des Referenzendmaßes seit seiner letzten Kalibrierung infolge von Drift
δl	- beobachtete Längendifferenz zwischen dem unbekanntem Endmaß und dem Referenzendmaß
δl_C	- Korrektur hinsichtlich einer Nichtlinearität und eines Offsets des Längenkomparators
L	- nominelle Länge der Endmaße
$\bar{\alpha} = (\alpha_x + \alpha_s) / 2$	- Mittelwert der thermischen Ausdehnungskoeffizienten des zu kalibrierenden und des Referenzendmaßes
$\delta t = (t_x - t_s)$	- Temperaturdifferenz zwischen dem zu kalibrierenden und dem Referenzendmaß
$\delta \alpha = (\alpha_x - \alpha_s)$	- Differenz der thermischen Ausdehnungskoeffizienten zwischen dem zu kalibrierenden und dem Referenzendmaß
$\Delta \bar{t} = (t_x + t_s) / 2 - t_0$	- Abweichung der mittleren Temperatur des zu kalibrierenden Endmaßes und des Referenzendmaßes von der Bezugstemperatur
δl_V	- Korrektur hinsichtlich nicht-zentrischer Antastung der Messflächen des zu kalibrierenden Endmaßes

S4.3 Referenznormal (l_s): Im Kalibrierschein wird die Länge des Referenzendmaßes zusammen mit der beigeordneten erweiterten Messunsicherheit für einen Endmaßsatz mit 50,000 02 mm ± 30 nm (Erweiterungsfaktor $k = 2$) angegeben.

S4.4 Drift des Referenznormales (δl_D): Die zeitliche Drift der Länge des Referenzendmaßes wird aus früheren Kalibrierungen auf Null mit maximalen Abweichungen von ± 30 nm abgeschätzt. Die allgemeine Erfahrung mit Endmaßen dieses Typs weist darauf hin, dass eine Nulldrift höchst wahrscheinlich ist und dass eine Dreieckverteilung für etwaige Abweichungen angenommen werden kann.

S4.5 Längenkomparator (δl_C): Vor der Kalibrierung wurde überprüft, dass der Längenkomparator den geforderten Spezifikationen des Leitfadens für die Kalibrierung von Endmaßen EA-10/02² entspricht. Daher kann sichergestellt werden, dass für Längendifferenzen D bis zu $\pm 10 \text{ }\mu\text{m}$ die Korrekturen der angegebenen Längendifferenz innerhalb der Grenzen $\pm(30 \text{ nm} + 0,02 \cdot |D|)$ liegen. Aus den Toleranzen des zu kalibrierenden Endmaßes der Toleranzklasse 0 und des Referenzendmaßes der Toleranzklasse K ergibt sich die maximale Längendifferenz zu $\pm 1 \text{ }\mu\text{m}$, d.h. die Grenzen für Nichtlinearitäts- und Offsetkorrekturen des Längenkomparators betragen ± 32 nm.

² frühere Bezeichnung: EAL-G21

S4.6 Temperaturkorrekturen ($\bar{\alpha}, \delta t, \delta \alpha, \Delta \bar{t}$): Es wurde dafür Sorge getragen, dass die Endmaße vor der Kalibrierung die Temperatur des Messraumes annehmen. Eine verbleibende Temperaturdifferenz zwischen dem Referenznormal und dem zu kalibrierenden Endmaß wird auf maximal $\pm 0,05$ K geschätzt. Aus den Angaben im Kalibrierschein des Referenzendmaßes und der Herstellerangaben für das zu kalibrierende Endmaß ist ersichtlich, dass der thermische Längenausdehnungskoeffizient der Stahleindmaße innerhalb von $(11,5 \pm 1,0) \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ liegt. Für die Differenz der Längenausdehnungskoeffizienten ergibt sich aus der Kombination der beiden Rechteckverteilungen eine Dreiecksverteilung in den Grenzen $\pm 2 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Die Abweichung der mittleren Temperatur im Messraum von der Bezugstemperatur $t_0 = 20 \text{ °C}$ wird auf maximal $\pm 0,5$ K geschätzt. Da der Schätzwert für die Differenz der Längenausdehnungskoeffizienten und die Abweichungen der mittleren Temperatur von der Bezugstemperatur Null sind, müssen bei der Ermittlung des entsprechenden Unsicherheitsbeitrags Terme zweiter Ordnung berücksichtigt werden. Dadurch ergibt sich die dem Produktterm $\delta \alpha \cdot \Delta \bar{t}$ in Gl. (S4.2) beizuordnende Standardmessunsicherheit als Produkt der Standardmessunsicherheiten, die seinen Faktoren beizuordnen ist (siehe mathematische Anmerkung in Abschnitt S4.13, Gl. (S4.5)). So ergibt sich schließlich $u(\delta \alpha \cdot \Delta \bar{t}) = 0,236 \cdot 10^{-6}$.

S4.7 Nicht-zentrische Antastung (δl_v): Bei Endmaßen der Toleranzklasse 0 muss die aus Messungen in der Mitte und an den vier Ecken ermittelte Längendifferenz innerhalb von $\pm 0,12 \text{ }\mu\text{m}$ liegen (ISO 3650). Unter der Annahme, dass diese Änderung an den Messflächen entlang der 9 mm langen kurzen Kante auftritt und dass das Mittenmaß in einem Kreis mit dem Radius 0,5 mm angetastet wird, wird eine Korrektur aufgrund einer nicht-zentrischen Antastung auf maximal $\pm 6,7 \text{ nm}$ geschätzt.

S4.8 Korrelation: Die Eingangsgrößen werden als unkorreliert angesehen.

S4.9 Beobachtungen (δl): Zur Bestimmung der Differenz zwischen dem unbekanntem Endmaß und dem Referenzendmaß wurden fünf Beobachtungen durchgeführt, wobei der Längenkomparator mit Hilfe des Referenznormales vor jeder Ablesung bezüglich eines Offsets korrigiert wurde:

Nr.	Beobachteter Wert
1	-100 nm
2	-90 nm
3	-80 nm
4	-90 nm
5	-100 nm

Arithmetischer Mittelwert: $\overline{\delta l} = -94 \text{ nm}$

Zusammengefasster Schätzwert der Standardabweichung
(aus früheren Ermittlungen): $s_p(\delta l) = 12 \text{ nm}$

Standardmessunsicherheit $u(\delta l) = s(\overline{\delta l}) = \frac{12 \text{ nm}}{\sqrt{5}} = 5,37 \text{ nm}$

Der zusammengefasste Schätzwert der Standardabweichung stammt aus Prüfungen, mit denen nachgewiesen wurde, dass der verwendete Längenkomparator den Forderungen des Leitfadens für die Kalibrierung von Endmaßen EA-10/02² entspricht.

S4.10 Messunsicherheitsbudget (l_x):

Größe	Schätzwert	Standardmessunsicherheit	Verteilung	Sensitivitätskoeffizient	Unsicherheitsbeitrag
X_i	x_i	$u(x_i)$		c_i	$u_i(y)$
l_s	50,000 020 mm	15 nm	Normal	1,0	15,0 nm
δl_b	0 mm	12,2 nm ³	Dreieck ³	1,0	12,2 nm ³
δl	-0,000 094 mm	5,37 nm	Normal	1,0	5,37 nm
δl_c	0 mm	18,5 nm	Rechteck	1,0	18,5 nm
δt	0 °C	0,0289 °C	Rechteck	-575 nm °C ⁻¹	-16,6 nm
$\delta \alpha \cdot \Delta \bar{t}$	0	$0,236 \times 10^{-6}$	-	50 mm	-11,8 nm
δl_v	0 mm	3,87 nm	Rechteck	-1,0	-3,87 nm
l_x	49,999 926 mm				34,3 nm ³

S4.11 Erweiterte Messunsicherheit

$$U = k \cdot u(l_x) = 2 \cdot 34,3 \text{ nm} \cong 69 \text{ nm}^3$$

S4.12 Vollständiges Messergebnis: Die gemessene Länge des Endmaßes der Nennlänge 50 mm beträgt 49,999 926 mm ± 69 nm.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

³ Im Originaltext von EA-4/02 wurde für den Unsicherheitsanteil der Drift hier abweichend von der Angabe in S.4.4 eine Rechteckverteilung angesetzt.

S4.13 Mathematische Anmerkung zur Standardmessunsicherheit des Produktes zweier Größen mit einem Erwartungswert von Null: Tritt ein Produkt aus zwei Größen auf, muss von der üblichen Methode zur Bestimmung der Unsicherheitsbeiträge, die auf der Linearisierung der Modellfunktion beruht, abgewichen werden, wenn einer oder beide Erwartungswerte der Faktoren gleich Null sind. Sind die Faktoren in dem Produkt statistisch voneinander unabhängig und sind ihre Erwartungswerte von Null verschieden, kann das Quadrat der dem Produkt beizuordnenden relativen Standardmessunsicherheit (relative Varianz) ohne Linearisierung durch die Quadrate der den Faktoren beizuordnenden relativen Standardmessunsicherheiten ausgedrückt werden:

$$w^2(x_1 \cdot x_2) = w^2(x_1) + w^2(x_2) + w^2(x_1) \cdot w^2(x_2) \quad (\text{S4.3})^4$$

Unter Benutzung der Definition der relativen Standardmessunsicherheit, kann dieser Ausdruck leicht in die folgende allgemeine Beziehung umgewandelt werden:

$$u^2(x_1 \cdot x_2) = x_2^2 u^2(x_1) + x_1^2 u^2(x_2) + u^2(x_1) \cdot u^2(x_2) \quad (\text{S4.4})^4$$

Wenn die den Erwartungswerten x_1 und x_2 beizuordnenden Standardmessunsicherheiten $u(x_1)$ und $u(x_2)$ wesentlich kleiner sind als die Beträge der jeweiligen Erwartungswerte, kann der dritte Term auf der rechten Seite vernachlässigt werden. Die resultierende Gleichung stellt den Fall dar, der mit der üblichen Methode aufgrund der Linearisierung der Modellfunktion behandelt wird.

Wenn jedoch einer der Beträge der Erwartungswerte, z.B. $|x_2|$, wesentlich kleiner als die diesem Erwartungswert beizuordnende Standardmessunsicherheit oder sogar gleich Null ist, kann zwar der diesen Erwartungswert enthaltende Produktterm, nicht jedoch der dritte Term auf der rechten Seite von Gl. (S4.4)⁴ vernachlässigt werden. Die sich ergebende Gleichung lautet dann:

$$u^2(x_1 \cdot x_2) \cong x_1^2 u^2(x_2) + u^2(x_1) \cdot u^2(x_2) \quad (\text{S4.5})^4$$

Sind beide Beträge der Erwartungswerte wesentlich kleiner als ihre zugehörigen Standardunsicherheiten oder sogar gleich Null, bleibt nur der dritte Term in Gl. (S4.4)⁴ als wesentlicher Beitrag bestehen:

$$u^2(x_1 \cdot x_2) \cong u^2(x_1) \cdot u^2(x_2) \quad (\text{S4.6})^4$$

⁴ Gegenüber dem Originaltext von EA-4/02 ist hier die Nummerierung der Formeln geändert.

S5 Kalibrierung eines Typ-N-Thermopaars bei 1000 °C

S5.1 Ein Typ-N-Thermopaar wird durch Vergleich mit zwei Typ R Referenzthermopaaren in einem horizontalen Ofen bei einer Temperatur von 1000 °C kalibriert. Die von den Thermopaaren erzeugte EMK wird mit einem Digitalvoltmeter über einen Wahl-/Umschalter gemessen. Alle Thermopaare haben ihre Vergleichsstellen bei 0 °C. Das zu kalibrierende Thermopaar ist über Ausgleichsleitungen mit dem Vergleichspunkt verbunden.

S5.2 Die Temperatur t_X der Messstelle (heiße Lötstelle) des zu kalibrierenden Thermopaars ist:

$$t_X = t_S \left(V_{IS} + \delta V_{IS1} + \delta V_{IS2} + \delta V_R - \frac{\delta t_{0S}}{C_{S0}} \right) + \delta t_S + \delta t_D + \delta t_F$$

$$\cong t_S (V_{IS}) + C_S \cdot \delta V_{IS1} + C_S \cdot \delta V_{IS2} + C_S \cdot \delta V_R - \frac{C_S}{C_{S0}} \delta t_{0S} + \delta t_S + \delta t_D + \delta t_F$$
(S5.1)

S5.3 Die Spannung V_X an den Anschlüssen der Ausgleichsleitung des zu kalibrierenden Thermopaars beträgt, wenn die Vergleichsstelle bei 0 °C liegt:

$$V_X(t) \cong V_X(t_X) + \frac{\Delta t}{C_X} - \frac{\delta t_{0X}}{C_{X0}}$$

$$= V_{IX} + \delta V_{IX1} + \delta V_{IX2} + \delta V_R + \delta V_{LX} + \frac{\Delta t}{C_X} - \frac{\delta t_{0X}}{C_{X0}}$$
(S5.2)

mit:

$t_S(V)$ - Temperatur des Referenzthermometers in Abhängigkeit von der Spannung, wenn die Vergleichsstelle bei 0 °C liegt. Die Funktion ist im Kalibrierschein angegeben.

V_{IS}, V_{IX} - angezeigte Spannungswerte

$\delta V_{IS1}, \delta V_{IX1}$ - Spannungskorrekturen aufgrund der Kalibrierung des Voltmeters

$\delta V_{IS2}, \delta V_{IX2}$ - Spannungskorrekturen aufgrund der begrenzten Auflösung des Voltmeters

δV_R - Spannungskorrektur aufgrund von Kontakteffekten des Umschalters

$\delta t_{0S}, \delta t_{0X}$ - Temperaturkorrekturen aufgrund der Abweichung der Vergleichstemperaturen von 0 °C

C_S, C_X - Spannungsempfindlichkeiten der Thermopaare bei der Messtemperatur von 1000 °C

C_{S0}, C_{X0} - Spannungsempfindlichkeiten der Thermopaare bei der Vergleichstemperatur von 0 °C

δt_D - Änderung der Werte der Referenzthermometer seit ihrer letzten Kalibrierung aufgrund von Driften

- δt_F - Temperaturkorrektur aufgrund von Inhomogenitäten der Ofentemperatur
- t - Temperatur, bei der das Thermopaar zu kalibrieren ist (Kalibrierpunkt)
- $\Delta t = t - t_X$ - Abweichung der Temperatur des Kalibrierpunktes von der Temperatur des Ofens
- δV_{LX} - Spannungskorrektur aufgrund der Ausgleichsleitungen

- S5.4** Die Messgröße ist die Ausgangs-EMK des zu kalibrierenden Thermopaars bei der Temperatur seiner Messstelle (heiße Lötstelle). Der Messprozess besteht aus zwei Schritten - Bestimmung der Ofentemperatur und Bestimmung der EMK des zu kalibrierenden Thermopaars -, die Bestimmung des Messwertes und der beizuordnenden Messunsicherheit aus zwei Teilen.
- S5.5 Referenznormale ($t_S(V)$):** Die Referenzthermopaare werden mit Kalibrierscheinen geliefert, in denen die Temperatur an der Messstelle bei einer Temperatur der Vergleichsstelle von 0 °C in Abhängigkeit von der Spannung an ihren Zuleitungen gegeben ist. Die zugeordnete erweiterte Messunsicherheit bei 1000 °C beträgt $U = 0,3$ K (Erweiterungsfaktor $k = 2$).
- S5.6 Kalibrierung des Voltmeters ($\delta V_{IS1}, \delta V_{IX1}$):** Das Voltmeter ist kalibriert. Alle abgelesenen Spannungen sind entsprechend korrigiert. Der Kalibrierschein gibt für Spannungen kleiner als 50 mV eine konstante erweiterte Messunsicherheit von $U = 2,0 \mu V$ an (Erweiterungsfaktor $k = 2$).
- S5.7 Auflösung des Voltmeters ($\delta V_{IS2}, \delta V_{IX2}$):** Ein 4½-stelliger Mikrospannungsmesser ist in seinem 10 mV-Bereich benutzt worden, d.h. die Auflösungsgrenzen der Anzeige betragen $\pm 0,5 \mu V$.
- S5.8 Störspannungen (δV_R):** Restoffsetspannungen, die auf Kontaktspannungen des Umschalters zurückzuführen sind, liegen innerhalb $\pm 2 \mu V$.
- S5.9 Vergleichstemperaturen ($\delta t_{0S}, \delta t_{0X}$):** Die Temperatur der Vergleichspunkte der einzelnen Thermopaare betragen 0 °C mit maximalen Abweichungen von $\pm 0,1$ K.
- S5.10 Spannungsempfindlichkeiten (C_S, C_X, C_{S0}, C_{X0}):** Die Spannungsempfindlichkeiten der Thermopaare sind Referenztabellen entnommen:

	1000 °C	0 °C
Referenzthermopaar	$C_S = 0,077 \text{ K}/\mu V$	$C_{S0} = 0,189 \text{ K}/\mu V$
zu kalibrierendes Thermopaar	$C_X = 0,026 \text{ K}/\mu V$	$C_{S0} = 0,039 \text{ K}/\mu V$

S5.11 Drift der Referenznormale (δt_D): Aus früheren Kalibrierungen werden die Driften der Referenznormale auf Null mit den Grenzen von $\pm 0,3$ K abgeschätzt.

S5.12 Temperaturinhomogenitäten (δt_F): Die Temperaturgradienten im Ofen sind gemessen worden. Bei 1000 °C liegen die Abweichungen aufgrund der Inhomogenitäten der Temperatur im Messbereich in den Grenzen von ± 1 K.

S5.13 Ausgleichsleitungen (δV_{LX}): Die Ausgleichsleitungen sind in dem Bereich 0 °C bis 40 °C untersucht worden. Aus diesen Messungen werden die Spannungsdifferenzen zwischen den Leitungen und dem Thermopaar auf innerhalb von ± 5 μ V geschätzt.

S5.14 Beobachtungen ($V_{IS}, t_S(V_{IS}), V_{IX}$): Die vom Voltmeter angezeigten Spannungen werden nach folgendem Messzyklus aufgezeichnet, bei dem vier Anzeigen pro Thermopaar erfolgen und die Effekte der Temperaturdrift in der Wärmequelle und der Thermospannungen im Messkreis vermindert werden:

1. Zyklus:

1. Referenznormal, zu kalibrierendes Thermopaar, 2. Referenznormal, 2. Referenznormal, zu kalibrierendes Thermopaar, 1. Referenznormal. Polumkehr.

2. Zyklus:

1. Referenznormal, zu kalibrierendes Thermopaar, 2. Referenznormal, 2. Referenznormal, zu kalibrierendes Thermopaar, 1. Referenznormal.

S5.15 Dieses Verfahren ist nur anwendbar, wenn die beobachtete Temperaturdifferenz zwischen den beiden Referenznormalen $\pm 0,3$ °C nicht überschreitet. Liegt die Differenz nicht in diesen Grenzen, müssen die Beobachtungen wiederholt werden und/oder die Gründe für die große Differenz müssen untersucht werden.

Thermopaar	1. Referenz	Unbekannt	2. Referenz
angezeigte Spannung, korrigiert	+10500 μ V	+36245 μ V	+10503 μ V
	+10503 μ V	+36248 μ V	+10503 μ V
	-10503 μ V	-36248 μ V	-10505 μ V
	-10504 μ V	-36251 μ V	-10505 μ V
Mittlere Spannung	10502,5 μ V	36248 μ V	10504 μ V
Temperatur der Messstelle	1000,4 °C		1000,6 °C
Temperatur des Ofens		1000,5 °C	

S5.16 Aus den vier Anzeigen der einzelnen Thermopaare in der obenstehenden Tabelle wird der Mittelwert der Spannungen der einzelnen Thermopaare bestimmt. Die Spannungswerte der Referenzthermopaare werden mit Hilfe der in ihren Kalibrierscheinen

angegebenen Temperatur/Spannungs-Beziehungen in Temperaturwerte umgerechnet. Die beobachteten Temperaturwerte sind stark korreliert (Korrelationsfaktor nahezu eins). Durch Verwendung des arithmetischen Mittelwertes werden sie zu nur einer Beobachtung zusammengefasst, die die Temperatur des Ofens am Ort des zu kalibrierenden Thermopaars angibt. In analoger Weise wird eine Beobachtung der Spannung des zu kalibrierenden Thermopaars ermittelt. Zur Ermittlung der diesen Beobachtungen beizuordnenden Standardmessunsicherheit wurde in einer früheren Messung eine aus zehn Beobachtungen bestehende Messreihe bei der gleichen Betriebstemperatur gewonnen. Sie ergab einen zusammengefassten Schätzwert der Standardabweichung für die Temperatur des Ofens und die Spannung des zu kalibrierenden Thermopaars.

Die Standardmessunsicherheiten, die den beobachteten Größen beizuordnen sind, sind:

Zusammengefasster Schätzwert der Standardabweichung: $s_p(t_S) = 0,10 \text{ K}$

Standardmessunsicherheit: $u(t_S) = \frac{s_p(t_S)}{\sqrt{1}} = 0,10 \text{ K}$

Zusammengefasster Schätzwert der Standardabweichung: $s_p(V_{IX}) = 1,6 \mu\text{V}$

Standardmessunsicherheit: $u(V_{IX}) = \frac{s_p(V_{IX})}{\sqrt{1}} = 1,6 \mu\text{V}$

S5.17 Messunsicherheitsbudget (Temperatur t_X des Ofens)

Größe	Schätzwert	Standardmessunsicherheit	Verteilung	Sensitivitätskoeffizient	Unsicherheitsbeitrag
X_i	x_i	$u(x_i)$		c_i	$u_i(y)$
t_S	1000,5 °C	0,10 K	Normal	1,0	0,10 K
δV_{IS1}	0 μV	1,00 μV	Normal	0,077 K / μV	0,077 K
δV_{IS2}	0 μV	0,29 μV	Rechteck	0,077 K / μV	0,022 K
δV_R	0 μV	1,15 μV	Rechteck	0,077 K / μV	0,089 K
δt_{0S}	0 K	0,058 K	Rechteck	-0,407	-0,024 K
δt_S	0 K	0,15 K	Normal	1,0	0,15 K
δt_D	0 K	0,173 K	Rechteck	1,0	0,173 K
δt_F	0 K	0,577 K	Rechteck	1,0	0,577 K
t_X	1000,5 °C				0,641 K

S5.18 Messunsicherheitsbudget (EMK V_X des zu kalibrierenden Thermopaars)

Die der Abweichung der Ofentemperatur vom eingestellten (angestrebten) Kalibrierpunkt beizuordnende Standardmessunsicherheit ist die der Temperatur des Ofens beigeordnete Standardmessunsicherheit, da der Kalibrierpunkt ein definierter (genau bekannter) Wert ist.

Größe X_i	Schätzwert x_i	Standardmessunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitätskoeffizient c_i	Unsicherheitsbeitrag $u_i(y)$
V_{iX}	36 248 μV	1,60 μV	Normal	1,0	1,60 μV
δV_{iX1}	0 μV	1,00 μV	Normal	1,0	1,00 μV
δV_{iX2}	0 μV	0,29 μV	Rechteck	1,0	0,29 μV
δV_R	0 μV	1,15 μV	Rechteck	1,0	1,15 μV
δV_{LX}	0 μV	2,9 μV	Rechteck	1,0	2,9 μV
Δt	0,5 K	0,641 K	Normal	38,5 $\mu\text{V}/\text{K}$	24,5 μV
δt_{0X}	0 K	0,058 K	Rechteck	-25,6 $\mu\text{V}/\text{K}$	-1,48 μV
V_X	36 229 μV				25,0 μV

S5.19 Erweiterte Messunsicherheiten

Die der Messung der Ofentemperatur beizuordnende erweiterte Messunsicherheit beträgt:

$$U = k \cdot u(t_X) = 2 \cdot 0,641 \text{ K} \cong 1,3 \text{ K}$$

Die mit dem Wert der EMK des zu kalibrierenden Thermopaars beizuordnende erweiterte Messunsicherheit beträgt:

$$U = k \cdot u(V_X) = 2 \cdot 25,0 \mu\text{V} \cong 50 \mu\text{V}$$

S5.20 Vollständiges Messergebnis

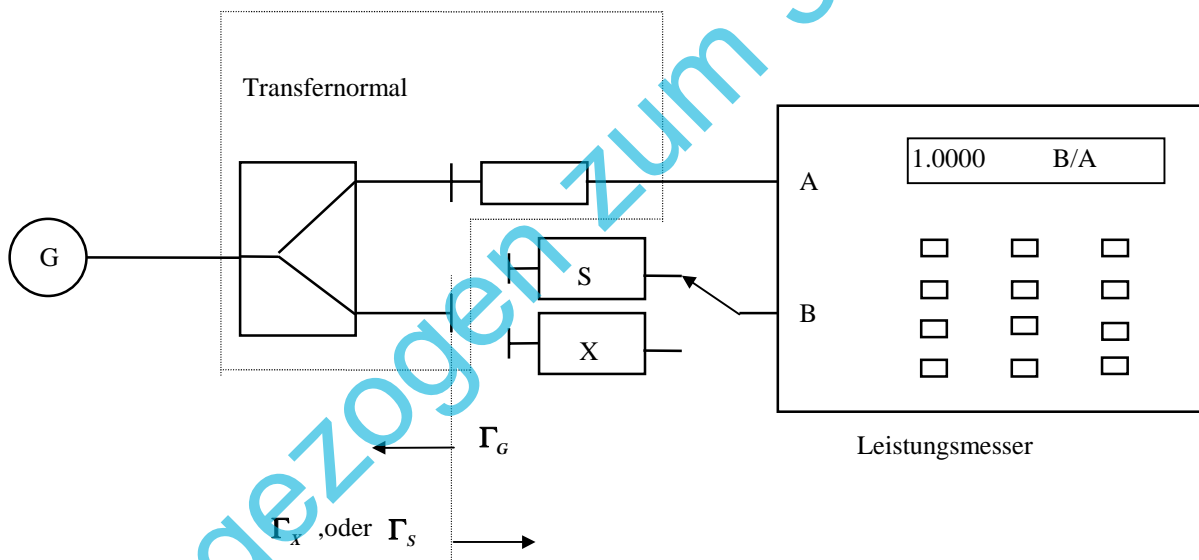
Das Typ-N-Thermopaar liefert bei der Temperatur von 1000,0 °C eine EMK von 36 230 $\mu\text{V} \pm 50 \mu\text{V}$, wenn sich seine Vergleichsstelle (kalte Lötstelle) auf einer Temperatur von 0 °C befindet.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

S6 Kalibrierung eines Leistungsmesskopfes bei der Frequenz von 18 GHz

S6.1 Zur Kalibrierung wird ein HF-Leistungsmesskopf mit einem als Referenznormal dienenden kalibrierten Leistungsmesskopf nach der Substitutionsmethode unter Benutzung eines stabilen Transferrnormales mit bekanntem, kleinen Reflexionsfaktor verglichen. Gemessen wird der Kalibrierungsfaktor, der als das Verhältnis der einfallenden Leistung (incident power) bei der Bezugsfrequenz von 50 MHz zur einfallenden Leistung bei der Kalibrierfrequenz definiert ist, unter der Bedingung, dass beide Eingangssleistungen zum gleichen Ausgangssignal des Leistungsmesskopfes führen. Bei der Kalibrier- und der Bezugsfrequenz wird für den zu kalibrierenden Leistungsmesskopf resp. den Referenzmesskopf das Leistungsverhältnis bezüglich des im Transferrnormales integrierten Messkopfes mit einem zweikanaligen Leistungsmesser bestimmt, der das Leistungsverhältnis direkt anzeigt.

S6.2 Schematische Darstellung des Messsystems



S6.3 Die Größe K , die von verschiedenen Herstellern als "Kalibrierungsfaktor" bezeichnet wird, ist definiert für die Bedingung gleicher Anzeige am Leistungsmesser als:

$$K = \frac{P_r}{P_{lc}} = \frac{(1 + |\Gamma_r|^2) P_{Ar}}{(1 + |\Gamma_c|^2) P_{Ac}} \quad (\text{S6.1})$$

mit:

- P_{lr} - einfallende Leistung bei der Bezugsfrequenz (50 MHz)
- P_{lc} - einfallende Leistung bei der Kalibrierfrequenz
- Γ_r - Reflexionsfaktor des Messkopfes bei der Bezugsfrequenz
- Γ_c - Reflexionsfaktor des Messkopfes bei der Kalibrierfrequenz
- P_{Ar} - vom Messkopf bei der Bezugsfrequenz aufgenommene Leistung
- P_{Ac} - vom Messkopf bei der Kalibrierfrequenz aufgenommene Leistung

S6.4 Der Kalibrierungsfaktor des zu kalibrierenden Messkopfes ergibt sich aus der Beziehung:

$$K_x = (K_s + \delta K_D) \frac{M_{Sr} M_{Xc}}{M_{Sc} M_{Xr}} p_{Cr} p_{Cc} p \quad (S6.2)$$

mit:

- K_s - Kalibrierungsfaktor des Referenzleistungsmesskopfes
- δK_D - Änderung des Kalibrierungsfaktors des Referenzleistungsmessers seit seiner letzten Kalibrierung aufgrund einer Drift
- M_{Sr} - Fehlanpassungsfaktor des Referenzmesskopfes bei der Bezugsfrequenz
- M_{Sc} - Fehlanpassungsfaktor des Referenzmesskopfes bei der Kalibrierfrequenz
- M_{Xr} - Fehlanpassungsfaktor des zu kalibrierenden Messkopfes bei der Bezugsfrequenz
- M_{Xc} - Fehlanpassungsfaktor des zu kalibrierenden Messkopfes bei der Kalibrierfrequenz
- p_{Cr} - Korrektur des beobachteten Verhältnisses aufgrund der Nichtlinearität und der begrenzten Auflösung des Leistungsmessers beim Leistungsverhältnis der Bezugsfrequenz
- p_{Cc} - Korrektur des beobachteten Verhältnisses aufgrund der Nichtlinearität und der begrenzten Auflösung des Leistungsmessers beim Leistungsverhältnis der Kalibrierfrequenz
- $p = \frac{P_{Sr} P_{Xc}}{P_{Sc} P_{Xr}}$ - beobachtetes Verhältnis der Leistungsverhältnisse, das sich ergibt aus dem:
 - p_{Sr} - angezeigten Leistungsverhältnis für den Bezugsmesskopf bei der Bezugsfrequenz
 - p_{Sc} - angezeigten Leistungsverhältnis für den Bezugsmesskopf bei der Kalibrierfrequenz
 - p_{Xr} - angezeigten Leistungsverhältnis für den zu kalibrierenden Messkopf bei der Bezugsfrequenz
 - p_{Xc} - angezeigten Leistungsverhältnis für den zu kalibrierenden Messkopf bei der Kalibrierfrequenz

- S6.5 Bezugsmesskopf (K_S):** Der Bezugsmesskopf ist sechs Monate zuvor kalibriert worden. Der im Kalibrierschein angegebene Wert des Kalibrierungsfaktors beträgt $(95,7 \pm 1,1) \%$ (Erweiterungsfaktor $k = 2$); dieser Wert wird als $0,957 \pm 0,011$ benutzt.
- S6.6 Drift des Normals (δK_D):** Die Drift des Kalibrierungsfaktors des Bezugsnormals wird aus jährlichen Kalibrierungen auf $-0,002$ pro Jahr mit Abweichungen von $\pm 0,004$ abgeschätzt. Aus diesen Werten ergibt sich die Drift des Bezugsmesskopfes, der ein halbes Jahr vorher kalibriert wurde, zu $-0,001$ mit maximalen Abweichungen von $\pm 0,002$.
- S6.7 Linearität und Auflösung des Leistungsmessers (p_{Cr}, p_{Cc}):** Die erweiterte Messunsicherheit von $0,002$ (Erweiterungsfaktor $k = 2$) bzw. $0,0002$ (Erweiterungsfaktor $k = 2$) wird den Leistungsmessanzeigen auf dem Leistungsverhältnissniveau der Bezugsfrequenz bzw. auf dem Leistungsverhältnissniveau der Kalibrierfrequenz aufgrund von Nichtlinearitäten des verwendeten Leistungsmessers beigeordnet. Diese Werte sind in früheren Messungen gewonnen worden. Da derselbe Leistungsmesser für die Beobachtung von p_S und p_X verwendet wird, sind die Unsicherheitsbeiträge bei der Bezugs- und der Kalibrierfrequenz korreliert. Die Leistungsverhältnisse werden bei beiden Frequenzen bestimmt, so dass der Effekt der Korrelation zu einer Verringerung der Messunsicherheit führt. Daher muss nur die auf systematische Effekte zurückzuführende relative Differenz zwischen den Anzeigen berücksichtigt werden (siehe mathematische Anmerkung in Abschnitt S3.12). Das führt dazu, dass dem Korrektionsfaktor p_{Cr} eine Standardmessunsicherheit von $0,00142$ und dem Korrektionsfaktor p_{Cc} eine Standardmessunsicherheit von $0,000142$ beigeordnet wird.

Die für die Anzeigen des Leistungsmessers angegebene erweiterte Messunsicherheit enthält Effekte aufgrund der Nichtlinearitäten und der Auflösung. Die Linearitätseffekte sind korreliert, während die Auflösungseffekte unkorreliert sind. Wie in S3.12 dargestellt, hebt die Bildung des Leistungsverhältnisses den Einfluss von Korrelationen auf und ergibt eine reduzierte Standardmessunsicherheit, die dem jeweiligen Leistungsverhältnis beizuordnen ist. In den obigen Berechnungen sind die getrennten korrelierten und unkorrelierten Anteile jedoch nicht bekannt, und die angegebenen Werte sind Obergrenzen für die zu den Leistungsverhältnissen gehörende Standardmessunsicherheit. Das Messunsicherheitsbudget zeigt schließlich, dass die aus den Leistungsverhältnissen stammenden Unsicherheitsbeiträge nicht signifikant sind, d.h. dass die gemachten Näherungen berechtigt sind.

- S6.8 Fehlanpassungsfaktoren ($M_{Sr}, M_{Sc}, M_{Xr}, M_{Xc}$):** Da das Transfornormalsystem keine vollkommene Anpassung aufweist und die Phase der Reflexionsfaktoren des Transfornormals, des zu kalibrierenden Leistungsmesskopfes und des Referenzleistungsmesskopfes nicht bekannt sind, besteht eine Unsicherheit aufgrund möglicher Fehlanpassungen für die einzelnen Messköpfe bei der Bezugs- und der Kalibrierfrequenz. Die entsprechenden Grenzen der Abweichungen werden sowohl für die Bezugs- als auch für die Kalibrierfrequenz aus der folgenden Beziehung bestimmt:

$$M_{s,x} = 1 \pm 2 \left| \Gamma_G \right| \left| \Gamma_{s,x} \right| \quad (S6.3)$$

Die Reflexionsfaktoren des Transfornormals, des zu kalibrierenden Leistungsmesskopfes und des Referenzleistungsmesskopfes besitzen die folgenden Beträge:

	50 MHz	18 GHz
$ \Gamma_G $	0,02	0,07
$ \Gamma_X $	0,02	0,12
$ \Gamma_S $	0,02	0,10

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der einzelnen Anteile ist U-förmig. Dies wird berücksichtigt, indem bei der Berechnung der Varianz aus dem Quadrat der aus den Grenzen ermittelten Halbwertsbreite der Faktor 1/3 für eine Rechteckverteilung durch den für die U-förmige Verteilung gültigen Faktor 1/2 ersetzt wird. Die auf Fehlanpassung zurückzuführende Standardmessunsicherheit wird daher gewonnen aus:

$$u(M_{S,X}) = \frac{2|\Gamma_G||\Gamma_S|}{\sqrt{2}} \quad (S6.4)$$

Anmerkung: Die Werte der Reflexionsfaktoren sind das Ergebnis von Messungen, die selbst mit Unsicherheiten behaftet sind. Dies wird berücksichtigt, indem die Quadratwurzel der quadrierten Summe der Messunsicherheit und der zum Quadrat erhobene gemessene Wert addiert werden.

S6.9 Korrelation: Die Eingangsgrößen der Auswertung werden als unkorreliert angesehen.

S6.10 Beobachtungen: Es werden drei getrennte Ablesungen vorgenommen. Dafür werden sowohl der Bezugsmesskopf als auch der zu kalibrierende Messkopf an das Transfernormal angeschlossen und wieder von ihm getrennt, um so die Reproduzierbarkeit der Leitungsverbindung einzuschließen. Die für die Berechnung des beobachteten Leistungsverhältnisses p verwendeten Anzeigen des Leistungsmessers sind:

Beob. Nr.	p_{Sr}	p_{Sc}	p_{Xr}	p_{Xc}	p
1	1,0001	0,9924	1,0001	0,9698	0,9772
2	1,0000	0,9942	1,0000	0,9615	0,9671
3	0,9999	0,9953	1,0001	0,9792	0,9836

Arithmetischer Mittelwert:

$$\bar{p} = 0,976$$

Empirische Standardabweichung:

$$s(p) = 0,0083$$

Standardmessunsicherheit

$$u(p) = s(\bar{p}) = \frac{0,0083}{\sqrt{3}} = 0,0048$$

S6.11 Messunsicherheitsbudget (K_X)

Größe X_i	Schätzwert x_i	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient c_i	Unsicherheits- beitrag $u_i(y)$
K_S	0,957	0,0055	Normal	0,976	0,00537
δK_D	-0,001	0,0012	Rechteck	0,976	0,00113
M_{Sr}	1,000	0,0006	U-förmig	0,933	0,00053
M_{Sc}	1,000	0,0099	U-förmig	-0,933	0,00924
M_{Xr}	1,000	0,0006	U-förmig	-0,933	-0,00053
M_{Xc}	1,000	0,0119	U-förmig	0,933	0,01110
p_{Cr}	1,000	0,0014	Normal	0,933	0,00132
p_{Cc}	1,000	0,0001	Normal	0,933	0,00013
p	0,976	0,0048	Normal	0,956	0,00459
K_X	0,933				0,01623

S6.12 Erweiterte Messunsicherheit

$$U = k \cdot u(K_X) = 2 \cdot 0,0162 \cong 0,032$$

S6.13 Vollständiges Messergebnis

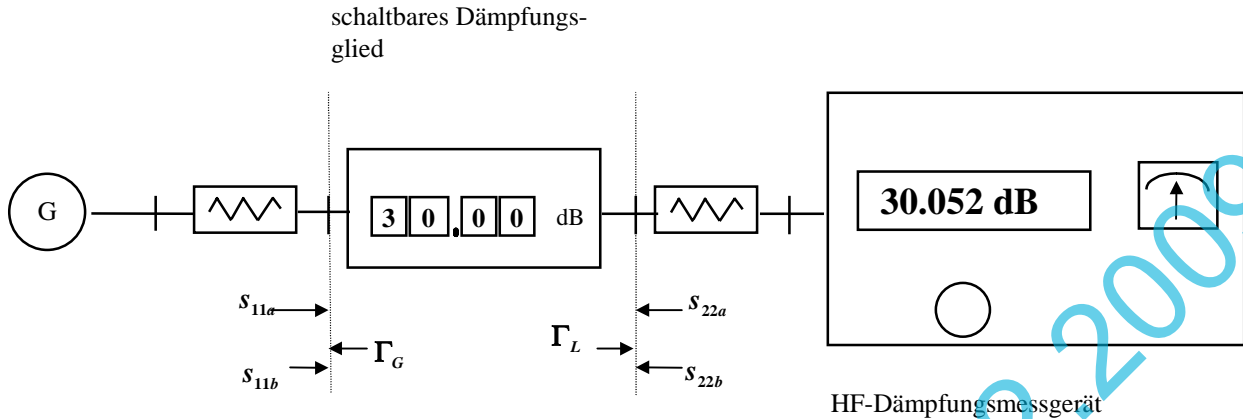
Der Kalibrierungsfaktor des Leistungsmesskopfes bei 18 GHz ist $0,933 \pm 0,032$. Dieser Wert wird häufig in der Form $(93,3 \pm 3,2) \%$ ausgedrückt.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

S7 Kalibrierung eines schaltbaren koaxialen Dämpfungsgliedes für einen Dämpfungsschritt von 30 dB

S7.1 Die Kalibrierung des schaltbaren koaxialen Dämpfungsgliedes erfolgt bei 10 GHz mit Hilfe eines Dämpfungsmesssystems, das ein kalibriertes schaltbares Dämpfungsglied enthält, das als Referenznormal dient. Die Messmethode ermittelt die Dämpfung zwischen angepasster Quelle und angepasster Last. Das zu kalibrierende Dämpfungsglied wird zwischen den Einstellungen 0 dB und 30 dB geschaltet; dabei wird der Dämpfungswert des Dämpfungsschrittes ermittelt. Das Dämpfungsmesssystem besitzt eine Digitalanzeige für den Dämpfungswert und einen analogen Nullindikator für die Anzeige des abgeglichenen Zustandes.

S7.2 Schematische Darstellung des Messsystems



S7.3 Die Dämpfung L_X des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes folgt aus der Beziehung:

$$L_X = L_S + \delta L_S + \delta L_D + \delta L_M + \delta L_K + \delta L_{ib} - \delta L_{ia} + \delta L_{0b} - \delta L_{0a} \quad (S7.1)$$

mit:

- $L_S = L_{ib} - L_{ia}$ - Dämpfungsdifferenz der Bezugsdämpfungsleitung, ergibt sich aus:
- L_{ia} - dem angezeigten Dämpfungswert für das auf 0 dB eingestellte, zu kalibrierende Dämpfungsglied
 - L_{ib} - dem angezeigten Dämpfungswert für das auf 30 dB eingestellte, zu kalibrierende Dämpfungsglied
 - δL_S - Korrektur aufgrund der Kalibrierung der Bezugsdämpfungsleitung
 - δL_D - durch Drift bedingte Änderung der Dämpfung der Bezugsdämpfungsleitung seit ihrer letzten Kalibrierung
 - δL_M - Korrektur bezüglich einer zusätzlichen Dämpfung durch Fehlanpassung
 - δL_K - Korrektur bezüglich Übersprechens zwischen Ein- und Ausgang des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes
 - $\delta L_{ia}, \delta L_{ib}$ - Korrekturen bezüglich der begrenzten Auflösung des Referenzmesskopfes bei 0 dB und 30 dB
 - $\delta L_{0a}, \delta L_{0b}$ - Korrekturen bezüglich der begrenzten Auflösung des Nullindikators bei 0 dB und 30 dB

S7.4 Bezugsdämpfungsleitung (δL_S): Der Kalibrierschein für die Bezugsdämpfungsleitung gibt einen Dämpfungswert für die 30,000 dB-Einstellung bei 10 GHz von 30,003 dB mit einer beigeordneten erweiterten Messunsicherheit von 0,005 dB (Erweiterungsfaktor $k = 2$) an. Die Korrektur von +0,003 dB mit der beigeordneten erweiterten Messunsicherheit von 0,005 dB (Erweiterungsfaktor $k = 2$) wird für Dämpfungseinstellungen der Bezugsdämpfungsleitung angesetzt, die nicht mehr als $\pm 0,1$ dB von der kalibrierten Einstellung von 30,000 dB abweichen.

S7.5 Drift der Referenz (δL_D): Die Drift des Dämpfungswertes der Bezugsdämpfungsleitung wird aufgrund ihrer Kalibriergeschichte auf Null mit Grenzen von $\pm 0,002$ dB für die maximalen Abweichungen abgeschätzt.

S7.6 Fehlanpassungsverlust (δL_M): Die Reflexionsfaktoren der Quelle und der Last im Einfügungspunkt des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes sind durch Impedanzanpassung auf möglichst kleine Beträge optimiert worden. Ihre Beträge und die Beträge der Streukoeffizienten des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes sind gemessen worden, ihre Phase ist jedoch nicht bekannt. Ohne Phaseninformationen kann eine Korrektur bezüglich eines Fehlanpassungsfehlers nicht vorgenommen werden; die durch die unvollständige Kenntnis der Anpassung bedingte Standardmessunsicherheit (in dB) wird mit der folgenden Beziehung [1] bestimmt:

$$u(\delta L_M) = \frac{8.686}{\sqrt{2}} \sqrt{|\Gamma_S|^2 (|s_{11a}|^2 + |s_{11b}|^2) + |\Gamma_L|^2 (|s_{22a}|^2 + |s_{22b}|^2) + |\Gamma_S|^2 \cdot |\Gamma_L|^2 (|s_{21a}|^4 + |s_{21b}|^4)} \quad (S7.2)$$

Mit den Reflexionsfaktoren von Quelle und Last

$$\Gamma_L = 0,03 \quad \text{und} \quad \Gamma_S = 0,03$$

und den Streukoeffizienten des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes (bei 10 GHz)

	0 dB	30 dB
s_{11}	0,05	0,09
s_{22}	0,01	0,01
s_{21}	0,95	0,031

ergibt sich eine Standardmessunsicherheit von $u(\delta L_M) = 0,02$ dB .

Anmerkung: Die Werte der Streukoeffizienten und Reflexionsfaktoren sind die Ergebnisse von Messungen. Sie sind deshalb auch nicht exakt bekannt. Dies wird durch Addition der Quadratwurzel der quadrierten Summe der Messunsicherheit und des Quadrates des jeweiligen Messwertes berücksichtigt.

S7.7 Korrektur für Übersprechen (δL_K): Übersprecheffekte werden in dem zu kalibrierenden Dämpfungsglied aus Messungen bei der 0 dB-Einstellung auf mindestens 100 dB kleiner als das Messsignal abgeschätzt. Eine Korrektur aufgrund von Übersprecheffekten bei der 30 dB-Einstellung wird aus diesen Ergebnissen auf maximal $\pm 0,003$ dB abgeschätzt.

S7.8 Auflösung der Einstellung der Bezugsdämpfungsleitung ($\delta L_{1a}, \delta L_{1b}$): Die digitale Anzeige der Bezugsdämpfungsleitung hat eine Auflösung von 0,001 dB, aus der die Korrektur bezüglich der Auflösung auf $\pm 0,0005$ dB abgeschätzt wird.

S7.9 Auflösung des Nullindikators ($\delta L_{0a}, \delta L_{0b}$): Die Auflösung des Nullindikators des Dämpfungsmessgerätes wurde aus einer früheren Messung abgeleitet. Unter der Annahme einer Normalverteilung ergibt sich eine Standardabweichung von 0,002 dB bei jeder Anzeige.

S7.10 Korrelation: Die Eingangsgrößen der Auswertung werden als unkorreliert angesehen.

S7.11 Beobachtungen: Der 30 dB-Dämpfungsschritt wurde aus vier Beobachtungen der 0 dB- und der 30 dB-Einstellung des zu kalibrierenden Dämpfungsgliedes gewonnen:

Beob.Nr.	Beobachtete Werte bei der	
	0 dB-Einstellung	30 dB-Einstellung
1	0,000 dB	30,033 dB
2	0,000 dB	30,058 dB
3	0,000 dB	30,018 dB
4	0,000 dB	30,052 dB

Arithmetischer Mittelwert: $\bar{L}_S = 30,040$ dB

Empirische Standardabweichung: $s(L_S) = 0,018$ dB

Standardmessunsicherheit $u(L_S) = s(\bar{L}_S) = \frac{0,018 \text{ dB}}{\sqrt{4}} = 0,009$ dB

S7.12 Messunsicherheitsbudget (L_x):

Größe X_i	Schätzwert x_i	Standard- messunsicherheit $u(x_i)$	Verteilung	Sensitivitäts- koeffizient c_i	Unsicherheits- beitrag $u_i(y)$
L_S	30,040 dB	0,0090 dB	Normal	1,0	0,0090 dB
δL_S	0,003 dB	0,0025 dB	Rechteck	1,0	0,0025 dB
δL_D	0 dB	0,0011 dB	U-förmig	1,9	0,0011 dB
δL_M	0 dB	0,0200 dB	U-förmig	1,0	0,0200 dB
δL_K	0 dB	0,0017 dB	U-förmig	1,0	0,0017 dB
δL_{1a}	0 dB	0,0003 dB	U-förmig	-1,0	-0,0003 dB
δL_{1b}	0 dB	0,0003 dB	Rechteck	1,0	0,0019 dB
δL_{0a}	0 dB	0,0020 dB	Rechteck	-1,0	0,0020 dB
δL_{0b}	0 dB	0,0020 dB	Normal	1,0	-0,0020 dB
L_x	30,043 dB				0,0224 dB

S7.13 Erweiterte Messunsicherheit:

$$U = k \cdot u(L_x) = 2 \cdot 0,0224 \text{ dB} \cong 0,045 \text{ dB}$$

S7.14 Vollständiges Messergebnis

Der Messwert der Dämpfungsleitung für eine Einstellung von 0 dB bei 10 GHz ist $(30,043 \pm 0,045)$ dB.

Angegeben ist die erweiterte Messunsicherheit, die sich aus der Standardmessunsicherheit durch Multiplikation mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ ergibt. Sie entspricht bei einer Normalverteilung der Abweichungen vom Messwert einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %.

S7.15 Literaturhinweis

- [1] Harris, I.A.; Warner, F.L.: *Re-examination of mismatch uncertainty when measuring microwave power and attenuation*. In: IEE Proc., Bd. 128, Pt.H, Nr. 1, Februar 1981