

Physikalisch- Technische Bundesanstalt




Expertenbericht Messunsicherheitsbeitrag bei der DKD-E 13-1 Quantisierung von Messwerten

Ausgabe 10/2020

<https://doi.org/10.7795/550.20201012>



	<p>Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012</p>	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	2 / 19

Deutscher Kalibrierdienst (DKD)

Im DKD sind Kalibrierlaboratorien von Industrieunternehmen, Forschungsinstituten, technischen Behörden, Überwachungs- und Prüfinstitutionen seit der Gründung 1977 zusammengeschlossen. Am 03. Mai 2011 erfolgte die Neugründung des DKD als *technisches Gremium* der PTB und der akkreditierten Laboratorien.

Dieses Gremium trägt die Bezeichnung Deutscher Kalibrierdienst (DKD) und steht unter der Leitung der PTB. Die vom DKD erarbeiteten Richtlinien und Leitfäden stellen den Stand der Technik auf dem jeweiligen technischen Fachgebiet dar und stehen der Deutschen Akkreditierungsstelle GmbH (DAkkS) für die Akkreditierung von Kalibrierlaboratorien zur Verfügung.

Die akkreditierten Kalibrierlaboratorien werden von der DAkkS als Rechtsnachfolgerin des DKD akkreditiert und überwacht. Sie führen Kalibrierungen von Messgeräten und Maßverkörperungen für die bei der Akkreditierung festgelegten Messgrößen und Messbereiche durch. Die von ihnen ausgestellten Kalibrierscheine sind ein Nachweis für die Rückführung auf nationale Normale, wie sie von der Normenfamilie DIN EN ISO 9000 und der DIN EN ISO/IEC 17025 gefordert wird.

Kontakt:

Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB)


DKD-Geschäftsstelle

Bundesallee 100 38116 Braunschweig

Postfach 33 45 38023 Braunschweig

Telefon Sekretariat: 0531 592-8021

Internet: www.dkd.eu

	<p>Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012</p>	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	3 / 19

Zitiervorschlag für die Quellenangabe:

Expertenbericht DKD-E 13-1 Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten, Ausgabe 10/2020, Revision 0, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig und Berlin. DOI: 10.7795/550.20201012


Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt und unterliegt der Creative Commons Nutzerlizenz CC by-nc-nd 3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>). In diesem Zusammenhang bedeutet „nicht-kommerziell“ (NC), dass das Werk nicht zum Zwecke der Einnahmenerzielung verbreitet oder öffentlich zugänglich gemacht werden darf. Eine Nutzung seiner Inhalte für die gewerbliche Verwendung in Laboratorien ist ausdrücklich erlaubt.



Autoren:

Dr.-Ing. Rudolf Frieling †, ehem. ELMTEC Ingenieurgesellschaft mbH, Königslutter
 Dr.-Ing. Manfred Klonz, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig
 Dr.-Ing. Torsten Funck, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig
 Philip M. Fleischmann, esz AG calibration & metrology, Eichenau

Herausgegeben von der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) für den Deutschen Kalibrierdienst (DKD) als Ergebnis der Zusammenarbeit der PTB mit dem Fachausschuss *Messunsicherheit* des DKD.


	<p>Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012</p>	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	4 / 19

Vorwort

DKD-Expertenberichte verfolgen das Ziel, Hintergrundinformationen und Hinweise zu geben, die im Zusammenhang mit anderen DKD-Dokumenten stehen, wie z. B. den DKD-Richtlinien, jedoch z. T. weit darüber hinausgehen. Sie ersetzen die originären DKD-Dokumente nicht, geben jedoch zahlreiche wissenswerte Zusatzinformationen. In den Expertenberichten wird nicht notwendigerweise in allen Details die Sichtweise des Vorstands oder der Fachausschüsse des DKD wiedergegeben.


Die DKD-Expertenberichte sollen wesentliche Aspekte aus dem Bereich des Kalibrierwesens darstellen und durch die Publikation im Rahmen des DKD der großen Gemeinschaft der Kalibrierlaboratorien national und international zugänglich gemacht werden.

Der vorliegende DKD-Expertenbericht wurde vom Vorstand des DKD im Dezember 2019 genehmigt.

	Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	5 / 19

INHALTSVERZEICHNIS

1	ZUSAMMENFASSUNG	6
2	MESSUNSICHERHEITSBEITRAG BEI DER QUANTISIERUNG VON MESSWERTEN	7
2.1	Vorüberlegung	7
2.2	Allgemeines	7
2.2.1	Annahmen für eine „einwandfreie“ Quantisierung	7
2.2.2	Begriffe und Festlegungen	8
2.3	Modell der Auswertung für die Anzeige eines Digitalvoltmeters	9
2.3.1	Messunsicherheitsbeitrag aufgrund der unbekanntten Lage der Skalenpunkte	10
2.3.2	Messunsicherheit aufgrund der Rundung des Messwertes	10
2.3.3	Messunsicherheitsbilanz	11
2.3.4	Verteilungsdichtefunktion der kombinierten Standardmessunsicherheit	12
2.4	Ideale Quantisierung	14
2.5	Empfehlung für die Praxis	15
3	LITERATUR	16
4	ANHANG	17
4.1	Charakteristische Daten für verschiedene Verteilungsdichtefunktionen	17
4.2	Faltung	17
4.2.1	Mathematische Definition	17
4.2.2	Faltung beim Würfelspiel (<i>Alea iacta est</i>)	17

	Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	6 / 19


1 Zusammenfassung

Dieser Bericht befasst sich mit der Abschätzung des Messunsicherheitsbeitrags durch Quantisierung bei digital anzeigenden Messgeräten mit dem Ziel, Quantisierungsvorgänge auf Basis der verfügbaren Informationen optimal zu beschreiben, und diese Informationen einfach in der Praxis anzuwenden. Er soll Hinweise geben, um neben der üblichen Betrachtung des Unsicherheitseinflusses der Ablesbarkeit der letzten dargestellten Stelle (*Digit*) eines Anzeigewertes als Rechteckverteilung innerhalb der Grenzen $a_R = \pm 0,5 \text{ Digit}$ den Quantisierungsvorgang unter technischen Gesichtspunkten besser zu beschreiben.

Die fundierte Analyse der Messunsicherheit eines digital anzeigenden Messgerätes zeigt schließlich, dass es sinnvoll ist, für den Vorgang des gesamten Messvorgangs eine Dreieck-Verteilungsdichte anzusetzen, und zwar mit der Breite $2a_D$ zweier Quantisierungsschritte (Codesprüngen). Damit erhält man eine kombinierte Standardabweichung (kombinierte Standardunsicherheit) $\sigma_D = u_{MU}(\delta U_{KombD}) = 2a_D \cdot 0,41$.

Wenn stattdessen als Näherung die Normalverteilung anstelle der Dreieckverteilung angenommen würde, wäre die kombinierte Standardmessunsicherheit etwas zu groß abgeschätzt. Für diesen Fall ist die Standardabweichung $\sigma_N = u_{MU}(\delta U_{KombN}) = 2a_N \cdot 0,5$ (bei einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95 %), wieder mit einer Breite der Verteilung $2a_N$ von zwei Quantisierungsschritten.

Dieser Bericht soll als eine alternative Betrachtung zu in der Praxis vertretenen Methoden beim Umgang mit Quantisierungsprozessen (bzw. Rundungen) und weniger als verbindliche Vorgehensweise oder Ersatz bisheriger Abschätzungen verstanden werden.

	Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	7 / 19

2 Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten

2.1 Vorüberlegung

Um das Prinzip der Quantisierung zu erklären, sei als Beispiel ein analoges Anzeigeinstrument für Spannungen mit Zeiger und Strichen als Skale herangezogen. Der Zeigerausschlag sei ein fehlerfreies Abbild der angelegten Spannung, ohne Reibungseinflüsse, Nichtlinearitäten des Drehspulsystems usw. Eine angelegte Spannung wird als Interpolation mit dem Auge zwischen zwei benachbarten Skalenstrichen erfasst. Für dieses Bild soll die Unsicherheit der Ablesung durch die Ausführung des Instruments, (Spiegelskale, Messerzeiger, ungenaue Interpolation usw.) nicht weiter betrachtet werden. Aber um bei dem Beispiel zu bleiben, soll die Frage aufgeworfen werden, wie richtig und präzise sind die Striche der Skale aufgebracht? Mit anderen Worten, es ist von einer entsprechenden Unsicherheit der Ablesung für den erhaltenen Anzeigewert auszugehen. Es muss also ein Beitrag der Unsicherheit des Messergebnisses aufgrund der ungenauen Platzierung der Skalenstriche angenommen werden, den man als „Skalenunsicherheit“ benennen könnte.

Völlig getrennt davon, könnte der Beobachter die Ablesung **grob** so gestalten, dass er als Ergebnis grundsätzlich den Wert, dem der untere Skalenstrich zugeordnet ist, als Messergebnis interpretiert, was einer (Ab-)Rundung entspricht. Damit verbunden ist naturgemäß eine Unsicherheit des Messergebnisses, weil ja alle angelegten Spannungswerte, die zwischen zwei benachbarte Skalenstriche fallen, immer nur das eine Messergebnis ergeben. Diese Unsicherheit könnte man als „Rundungsunsicherheit“ benennen.


Diese Vorüberlegungen wurden bei der Betrachtung der Messunsicherheit der Quantisierung berücksichtigt.

2.2 Allgemeines

Als exemplarisches Beispiel für die Aufgabenstellung soll ein Digitalvoltmeter mit dem Übertragungsfaktor $V = 1$ (die Ausgangsspannung bzw. angezeigte Spannung U_{Anz} dividiert durch die angelegte Eingangsspannung U_{Ein}) betrachtet werden.

2.2.1 Annahmen für eine „einwandfreie“ Quantisierung

- „No missing Code“: Jeder mögliche Anzeigewert ist durch eine angelegte Spannung erreichbar.
- Monotonie: Bei ansteigenden (abfallenden) Werten der angelegten Spannung ergeben sich nur Quantisierungssprünge der angezeigten Spannung in aufsteigender (absteigender) Folge.
- Die Hysterese bei absteigender Spannung (d. h. bei Reversierung der angelegten Spannung) wird als unbedeutend klein angesehen.
- Die für einen Codesprung notwendige Änderung der angezeigten Spannung ist überall gleich.

	Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	8 / 19

- Die durch eine Kalibrierung feststellbaren Abweichungen der Anzeige seien mit einer Korrektur kompensiert.
- Die Art der Realisierung der Analog-/ Digitalwandlung in einem Messgerät mit Digitalanzeige spielt bei der Analyse der Messunsicherheit zur Quantisierung keine wesentliche Rolle (Dual-Slope-Integrationsverfahren, Parallelverfahren, Kompensationsverfahren, Wägeverfahren usw.).

2.2.2 Begriffe und Festlegungen

Quantisierung

Die Quantisierung ist in der digitalen Signalverarbeitung eine Abbildung, die bei der Digitalisierung von Analogsignalen auftritt.

Ein kontinuierlich feststellbarer Messwert wird in eine „digitalisierte“ Form gebracht, und kann so als eine Zahl mit bestimmter Stellenzahl dargestellt werden (mit zusätzlicher Angabe der Einheit des Messwertes).

Digitalisierung

Unter Digitalisierung versteht man allgemein die Aufbereitung von Informationen zur Verarbeitung oder Speicherung in einem digitaltechnischen System. Die Informationen liegen dabei in beliebiger analoger Form vor und werden dann, ggf. über mehrere Stufen, in ein digitales Signal umgewandelt, das nur aus diskreten Werten besteht.

Klassierung

Klassierung bezeichnet die Einteilung von statistischen Reihen in getrennte Größenklassen. Jedes Element der untersuchten Gesamtheit wird in Abhängigkeit von seinem Wert auf der entsprechenden Variablen genau einer Klasse zugeordnet. Alle Werte einer Klasse liegen innerhalb der oberen und unteren Klassengrenze, wobei die Differenz der oberen und unteren Klassengrenze die Klassenbreite ist. In diesem Bericht entspricht die Klassierung der Messwerte einer Rundung.

Diskretisierung

Darstellung einer Funktion $y(x)$ durch Werte $y_i(x_i)$ an endlich vielen Stützstellen x_i (Der Begriff „Diskretisierung“ spielt in diesem Bericht keine Rolle. Er ist zum Beispiel verwandt mit den Begriffen „Sampling“ und „Abtastung“. Er muss von den Begriffen „Digitalisierung“ und „Quantisierung“ abgegrenzt werden.).

Quantisierungsstufe (Codesprung; Sprunghöhe)


Höhe des Sprungs eines (des kleinsten möglichen) Ziffernschritts in der Anzeige. Der entsprechende Wert soll in diesem Bericht mit ΔU_{Code} bezeichnet werden.

Schaltswelle (Sprungstelle, Umschaltpunkt)

Wert der Messgröße, bei dem die Umschaltung einer digitalen Anzeige von einer Ziffer zur anderen erfolgt.

Erweiterte Messunsicherheit U_{MU}

Da in diesem Bericht mit Spannungswerten als U gearbeitet wird, soll im Unterschied dazu die üblicherweise auch mit $U(\dots)$ dargestellte erweiterte Messunsicherheit den Index „MU“ erhalten, also U_{MU} . Ein weiterer Index kann dann anzeigen, wenn eine spezielle erweiterte Messunsicherheit gemeint ist.

	Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	9 / 19

Breite einer Verteilungsdichte

Bezeichnet mit $2a$, also a als Halbbreite der Verteilung beziehungsweise der Verteilungsdichtefunktion, außerhalb derer normalerweise keine Werte der Funktion auftreten.

Skale [VIM 3.5]

Teil eines anzeigenden Messgeräts, der aus einer geordneten Menge von Markierungen zusammen mit zugehörigen Größenwerten besteht. Die Markierungen werden in diesem Bericht Skalenpunkte genannt.

Skalenintervall

Der jeweilige Bereich, der durch zwei benachbarte Skalenpunkte definiert ist.

Anmerkung zu dem in diesem Bericht eine Rolle spielenden Begriff der Rundung:

Im weiten Sinne ist die Quantisierung bei digital anzeigenden Geräten eine Rundung der Messwerte in der Anzeige. Sie ist in einer bestimmten Art (Abrundung, Aufrundung oder Rundung im engeren mathematischen Sinn, bzw. kaufmännische Rundung) in einem Messgerät verwirklicht, und zwar als ein Konstruktionsmerkmal. Einzelheiten dazu sind oft nicht bekannt und werden in den technischen Daten üblicherweise auch nicht angegeben. Die Art der Rundung hat natürlich einen kleinen Einfluss auf das Messergebnis, der jedoch nach einer Kalibrierung durch Korrektur eliminiert wird.

Hier in dem vorliegenden Bericht wird von der häufig anzutreffenden Abrundung bei der Quantisierung ausgegangen. Sie ist wohl am einfachsten gerätetechnisch zu verwirklichen und auch einfach zu erläutern (Abschneiden der überzähligen Stellen).

Wichtig ist festzustellen, dass die Art der Rundung (Abrundung, Aufrundung oder kaufmännische Rundung), wenn die vorausgesetzte Korrektur des Messergebnisses ordnungsgemäß erfolgt ist, keinen Beitrag zur Messunsicherheit liefert.

2.3 Modell der Auswertung für die Anzeige eines Digitalvoltmeters


Die Modellgleichung (Modell der Auswertung) für die Anzeige eines Digitalvoltmeters wird folgendermaßen angegeben:

$$U_{Anz} + \delta U_{Komb} = U_{Ein} + \Delta U_{Anz} + \delta U_{Skale} + \delta U_{Klass} + \delta U_{Sonst}$$

(Gleichung 1)

mit:

U_{Anz}	Anzeigewert des Digitalvoltmeters.
U_{Ein}	Am Eingang des Digitalvoltmeters angelegte Spannung.
ΔU_{Anz}	Abweichung der Anzeige, bestimmt z. B. durch eine Kalibrierung.
δU_{Komb}	Unbekannte oder unbestimmbare kleine Abweichung, die Träger einer Unsicherheit ist, die dem Anzeigewert des Digitalvoltmeters beigemessen wird.
δU_{Skale}	Unbekannte oder unbestimmbare kleine Abweichung der Lage der Skalenpunkte, die Ursache einer entsprechenden Unsicherheit ist (s. u.).
δU_{Rund}	Unbekannte oder unbestimmbare kleine Abweichungen wegen der Abrundung, also der Zuordnung zu Skalenintervallen, die Ursache einer entsprechenden Unsicherheit sind (s. u.).
δU_{Sonst}	Platzhalter für sonstige unbekannt oder unbestimmbare kleine Abweichungen, die bei einer Messung mit einem Digitalvoltmeter auftreten können

	Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	10 / 19

und Ursache für weitere Unsicherheitsbeiträge sein können. Sie sollen in diesem Bericht unberücksichtigt bleiben.

2.3.1 Messunsicherheitsbeitrag aufgrund der unbekanntenen Lage der Skalenpunkte

In dem Digitalvoltmeter ist bei seiner Herstellung eine Skale realisiert, gegen die die Eingangsspannung des Voltmeters verglichen wird. Damit ist intern ein Abbild der Eingangsspannung verfügbar als Bezug zu den nahezu richtigen Skalenpunkten, so gut sie bei der Herstellung eingemessen werden konnten. Wenn man die Lage der realisierten Skalenpunkte allerdings mit einer Referenzskale vergleicht, die „richtige“ Werte der Lage der Skalenpunkte repräsentiert, werden gewisse Abweichungen $\delta U_{\text{Skale}}(i) = U_{\text{Skale}}(i) - U_{\text{Ref}}(i)$ in jedem Skalenintervall i feststellbar sein (s. Abbildung 1, oberer Teil).

Diese Abweichungen könnte man theoretisch sogar für jedes Skalenintervall bei Verwendung eines genügend genauen einstellbaren Kalibrators bestimmen, was allerdings sehr zeitaufwändig wäre und kaum jemals ausgeführt wird. Man könnte damit aber eine statistische Aussage für die Skalenabweichung des betreffenden speziellen Voltmeters erhalten.

Sinnvoll und auch üblich ist eine generelle statistische Aussage über die Abweichungen $\delta U_{\text{Skale}}(i)$ zu treffen, um daraus eine Abschätzung zum entsprechenden Messunsicherheitsbeitrag zu erhalten. Allgemein stehen dazu folgende Informationen zur Verfügung:

1. Die Abweichung $\delta U_{\text{Skale}}(i)$ kann maximal plus oder minus einer halben Skalenintervall-Breite sein, also insgesamt eine Skalenintervall-Breite. Mit der Skalenintervall-Breite $\Delta U_{\text{Skale}}(i)$ kann das angegeben werden zu $-0,5 \cdot \Delta U_{\text{Skale}}(i) \leq \delta U_{\text{Skale}}(i) < +0,5 \cdot \Delta U_{\text{Skale}}(i)$. Dies gilt für alle Skalenintervalle i . Die halbe Breite der Verteilungsdichtefunktion ist $a = \Delta U_{\text{Skale}}(i)/2$.
2. Da normalerweise keine Angaben zu der Verteilungsdichte der Abweichung $\delta U_{\text{Skale}}(i)$ verfügbar sind, kann nur eine Gleichverteilung angenommen werden.

Der Beitrag zur Messunsicherheit aufgrund der möglichen Abweichung der Lage der Skalenpunkte ist damit:

$$u_{MU}(\delta U_{\text{Skale}}) = \frac{0,5 \cdot \Delta U_{\text{Skale}}(i)}{\sqrt{3}} \approx \frac{0,5 \cdot \Delta U_{\text{Code}}}{\sqrt{3}}$$

(Gleichung 2)

bei Annahme einer Gleichverteilung.

Der Abstand eines Skalenpunkts $\Delta U_{\text{Skale}}(i)$ ist im Allgemeinen als eine statistische Größe nicht genau bekannt, aber im Mittel ist $\Delta U_{\text{Skale}}(i) \approx \Delta U_{\text{Code}}$, wobei die Quantisierungsstufe ΔU_{Code} durch die Hardware des Digitalvoltmeters festliegt, und ihr Wert kann in Gleichung 3 verwendet werden.

2.3.2 Messunsicherheit aufgrund der Rundung des Messwertes

Wie beschrieben fällt ein Eingangswert in ein definiertes Skalenintervall der intern realisierten Skale des Voltmeters, und erfährt dann eine Abrundung¹ gemäß der „Skalenpunkte“ der internen Skale. Der gerundete Wert $U_{\text{Rund}}(i)$ führt so zu der numerischen Anzeige. Zwischenwerte, die z. B. durch eine Interpolation erhalten werden könnten, werden

¹ technisches Konstruktionsmerkmal

durch die Abrundung unterdrückt. Diese Klassierung der Messwerte ist der eigentliche Quantisierungsprozess. Es ist klar, die ursprüngliche Eingangsspannung wird vergrößert dargestellt. Dies führt dazu, dass es eine unbekannte oder unbestimmbare kleine Abweichung gibt, die sich als $\delta U_{\text{Rund}}(i) = U_{\text{Rund}}(i) - U_{\text{Ein}}$ darstellt (s. Abbildung 1, unterer Teil). Mit anderen Worten, alle Eingangsspannungswerte, die in ein bestimmtes Rundungsintervall fallen, haben ein- und dieselbe Anzeige zur Folge. Wobei nicht mehr feststellbar ist, wie groß die Differenz $\delta U_{\text{Rund}}(i)$ ist. Man muss also einen Messunsicherheitsbeitrag ansetzen. Die Breite der Verteilungsdichtefunktion ist $2a_R = \Delta U_{\text{Rund}}(i) \approx \Delta U_{\text{Code}}$.

Da für eine Eingangsspannung jeder Wert des Messbereichs möglich ist, kann auch innerhalb eines Rundungsintervalls jeder Wert auftreten, und zwar mit einer Gleichverteilung. Der Beitrag zur Messunsicherheit aufgrund der Rundung ist damit:

$$u_{\text{MU}}(\delta U_{\text{Rund}}) = \frac{0,5 \cdot \Delta U_{\text{Code}}}{\sqrt{3}}$$

(Gleichung 3)

bei Annahme einer Gleichverteilung.

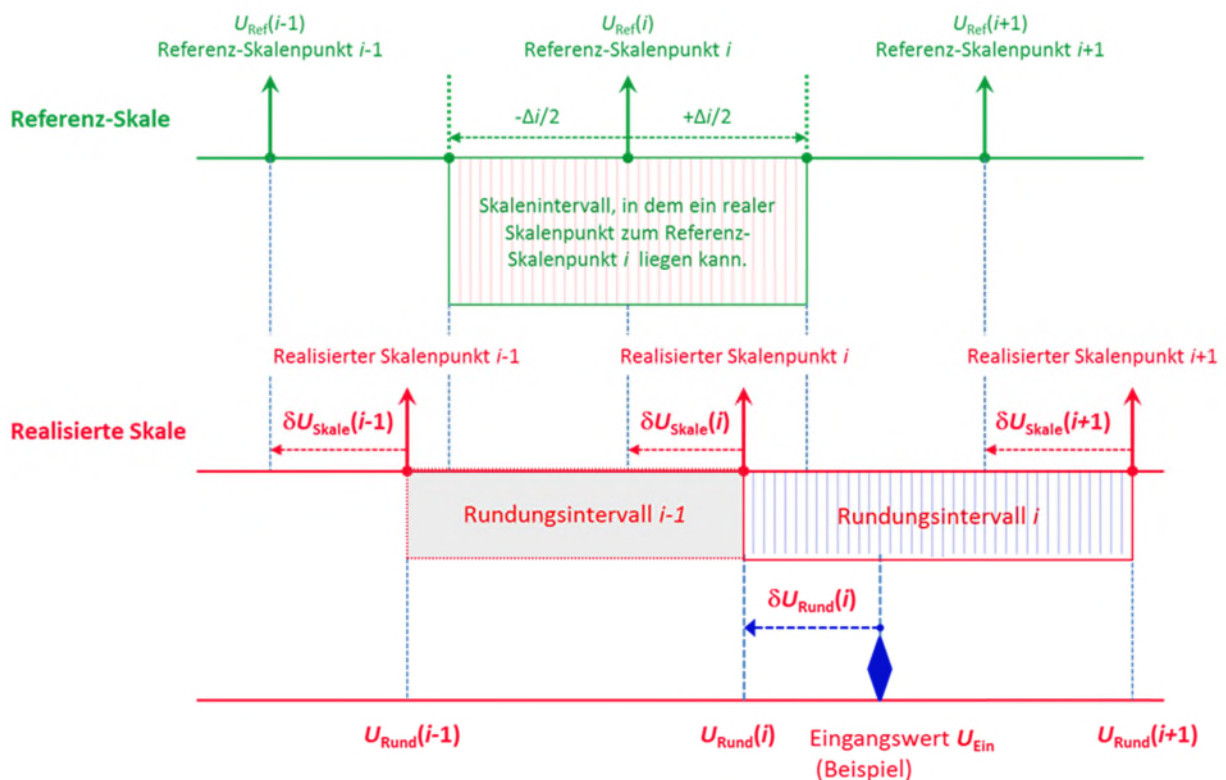



Abbildung 1: Skalenausschnitt

2.3.3 Messunsicherheitsbilanz

Es ist festzustellen, dass die beiden Beiträge

1. Standardunsicherheitsbeitrag (Skalenunsicherheit) aufgrund der möglichen Abweichung der Lage der Skalenelemente $u_{\text{MU}}(\delta U_{\text{Skale}})$ und
2. Messunsicherheit (Rundungsungenauigkeit) aufgrund der Rundung $u_{\text{MU}}(\delta U_{\text{Rund}})$

	Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	12 / 19

voneinander unabhängig sind, also unkorreliert.

Die kombinierte Standardunsicherheit aus den beiden Beiträgen beträgt:

$$u_{MU}(\delta U_{Komb}) = \sqrt{(u_{MU}(\delta U_{Skale}))^2 + (u_{MU}(\delta U_{Rund}))^2} \quad \text{(Gleichung 4)}$$

Also:

$$u_{MU}(\delta U_{Komb}) = \frac{\Delta U_{Code}}{\sqrt{6}} = 0,4082 \cdot \Delta U_{Code} \quad \text{(Gleichung 5)}$$

Leider ist diesem Ergebnis nicht anzusehen, welche zugehörige Verteilungsdichte ihr zuzuordnen ist, und welche Breite ihre Verteilungsdichte ($2a_D$) hat. Diese Information wäre aber für eine Weiterverwendung des Ergebnisses von Bedeutung, insbesondere wenn die beiden angegebenen Unsicherheitsbeiträge signifikant sind und ein gesicherter Erweiterungsfaktor für die Ermittlung der erweiterten Messunsicherheit der Digitalanzeige bekannt sein muss. Die so noch fehlende Information wird im folgenden Abschnitt untersucht.

2.3.4 Verteilungsdichtefunktion der kombinierten Standardmessunsicherheit

Es gibt, wie dargestellt, zwei signifikante Beiträge zur Messunsicherheit für die Anwendung eines Digitalvoltmeters (s. Abschnitte 2.3.1 und 2.3.2), und zwar:

1. Beitrag zur Messunsicherheit (Skalenunsicherheit), (Gleichung 2) aufgrund der möglichen Abweichung der Lage der Skalenpunkte und
2. Messunsicherheit (Rundungsungenauigkeit), (Gleichung 3) aufgrund der Rundung:
 $u_{MU}(\delta U_{Rund})$

Sind sie beide gleichverteilt bei einer Breite von jeweils einem Intervall $\Delta U_{Code} \approx \Delta U_{Skale}(i)$ zur Ermittlung der Verteilungsdichte der kombinierten Unsicherheit, muss allgemein gesprochen der mathematische **Prozess der Faltung (Convolution)** (s. Anhang) angesetzt werden [PAPOULIS]. Für den vorliegenden (einfachen) Fall ist das Ergebnis allerdings vielfach in der Literatur angegeben [z. B. GUM]. Das Ergebnis der Faltung ist eine dreieckförmige Verteilungsdichtefunktion mit der Breite $2a_D = 2 \cdot \Delta U_{Code}$ (Doppelte Intervallbreite entsprechend zwei Quantisierungsstufen).

Zu dieser dreieckförmigen Verteilungsdichtefunktion [s. GUM] gehört eine Standardabweichung σ_D (Standardmessunsicherheit $u_{MU}(\delta U_{KombD})$, siehe auch Abschn. 2.3.3)

$$u_{MU}(\delta U_{KombD}) = \sigma_D = \frac{2 \cdot \Delta U_{Code}}{2 \cdot \sqrt{6}} = 0,4082 \cdot \Delta U_{Code} \quad \text{(Gleichung 6)}$$

(halbe Breite der Verteilungsdichtefunktion geteilt durch Wurzel aus sechs bei Dreieckverteilung)

sowie ein Erweiterungsfaktor $k_D = 1,902$.

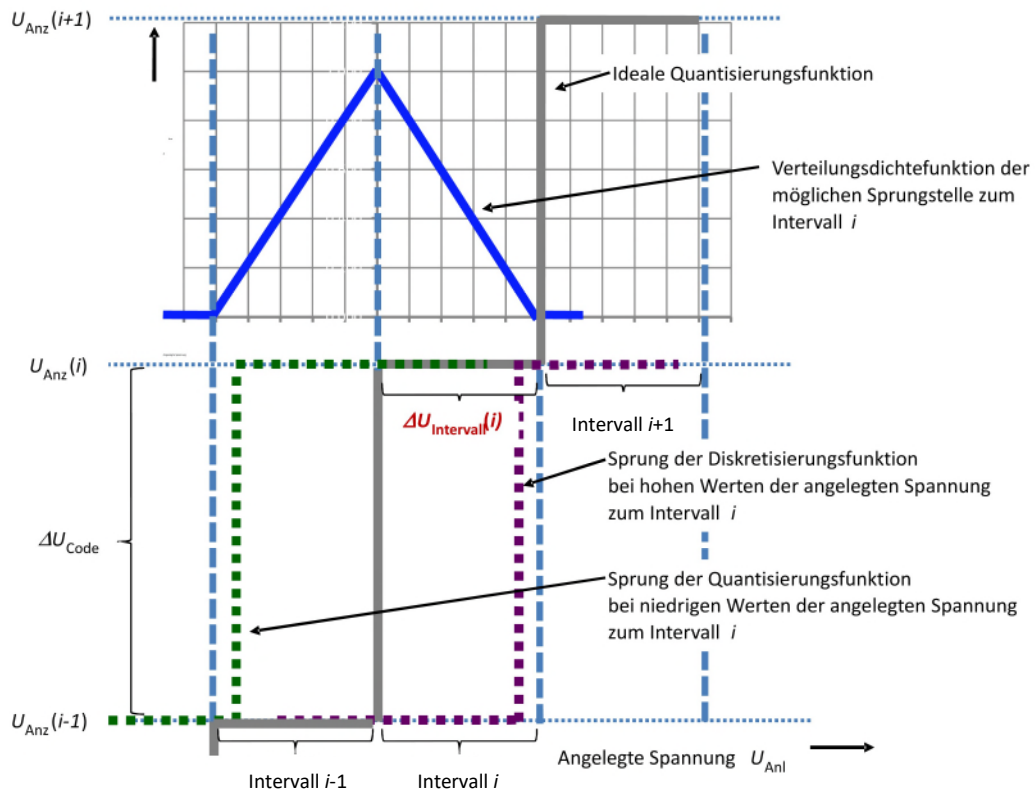


Abbildung 2: Visualisierung der realen Quantisierung

Wenn etwas Spielraum nach oben für die Messunsicherheit vorhanden ist, kann eine Approximation der Dreiecksverteilung durch eine Normalverteilung (zum Beispiel mit einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95,45 % entsprechend $2\sigma_N$) gerechtfertigt sein.

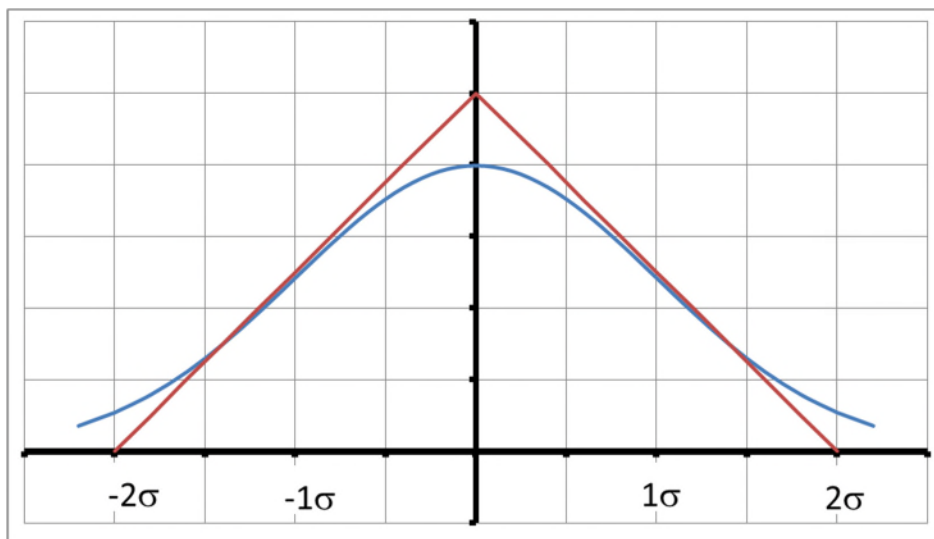



Abbildung 3: Vergleich der Dreiecksverteilungsdichte mit der der Normalverteilung

Das bedeutet, die Standardunsicherheit ergibt sich mit der Standardabweichung zu

	Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	14 / 19

$$u_{\text{MU}}(\delta U_{\text{KombN}}) = \sigma_N = \frac{2 \cdot \Delta U_{\text{Code}}}{2 \cdot 2} = \frac{\Delta U_{\text{Code}}}{2} = 0,5 \cdot \Delta U_{\text{Code}} \quad (\text{Gleichung 7})$$

(halbe Breite der Verteilungsdichtefunktion geteilt durch 2 bei Normalverteilung)

Der Erweiterungsfaktor ist dann $k_N = 2,0$; also ist die erweiterte Messunsicherheit $U_{\text{MU}}(\delta U_{\text{KombN}}) = \Delta U_{\text{Code}}$. Dieser einfache Ansatz ist für die meisten Anwendungen in der Praxis gut geeignet (s. Abschnitt 2.5).

2.4 Ideale Quantisierung

Allgemein gibt es Fälle für eine Quantisierung, bei der keine Skale im Spiel ist, und demzufolge auch kein Beitrag zur Messunsicherheit aufgrund der möglichen Abweichung der Lage der Skalenpunkte. Das bedeutet, im Idealfall liegt der Quantisierungspunkt bei

$$U_{\text{Ein}} = U_{\text{Anz}}(i) \quad @ \quad i = 1, \dots, n$$

mit

n : Zahl der Quantisierungsstufen.

somit kann ein bestimmter Wert der Anzeige $U_{\text{Anz}}(i)$ von einer angelegten Spannung im Intervall $U_{\text{Anz}}(i) \leq U_{\text{Ein}} < U_{\text{Anz}}(i) + \Delta U_{\text{Code}}$ herrühren, bei Gleichverteilung im Intervall. Es gibt nur diesen einen Beitrag zur Messunsicherheit aufgrund der Rundung. Dieser Sachverhalt ist formal gleichbedeutend mit dem mathematischen Vorgang einer Abrundung (s. Abschnitt 2.3.2).

Die Breite der rechteckigen Verteilungsdichte ist $2a_1 = \Delta U_{\text{Code}}$, also ein Quantisierungsschritt. Damit erhält man eine Standardabweichung

$$\sigma_1 = 0,5 \cdot \Delta U_{\text{Code}} \cdot 1/\sqrt{3} = 0,2887 \cdot \Delta U_{\text{Code}} \quad (\text{Gleichung 8})$$

(halbe Breite der Dichtefunktion geteilt durch Wurzel aus 3 bei Gleichverteilung)

Der Erweiterungsfaktor ist dann $k_1 = 1,653$.

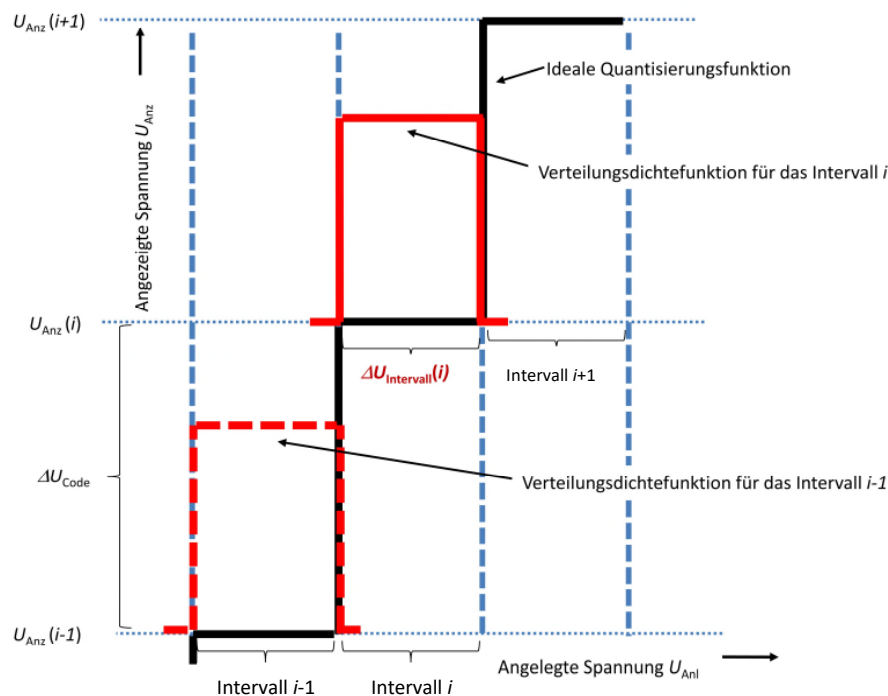


Abbildung 4: Visualisierung des idealen Quantisierungsvorgangs

2.5 Empfehlung für die Praxis

Es gibt zwei Vorschläge für die Vorgehensweise in der Praxis, wenn die Abschätzung des Messunsicherheitsbeitrags für einen Quantisierungsvorgang (nachprüfbar) durchgeführt werden soll:

1. Wenn es sehr auf einen zwar zuverlässigen, aber nicht überhöhten Wert für die Messunsicherheit ankommt, wird die Dreieckverteilung über zwei Intervalle angesetzt. Damit ist die zugehörige Standardmessunsicherheit als Standardabweichung mit

$$\sigma_D = \frac{\Delta U_{\text{Code}}}{\sqrt{6}} = 0,4082 \cdot \Delta U_{\text{Code}}$$


(Gleichung 9)

angebar, und es kann mit dem Erweiterungsfaktor $k_D = 1,9$ gearbeitet werden, um die erweiterte Messunsicherheit $U_{\text{MU}}(\delta U_{\text{KombD}})$ zu bestimmen. Es ist:

$$U_{\text{MU}}(\delta U_{\text{KombD}}) = \sigma_D \cdot k_D = 0,7757 \cdot \Delta U_{\text{Code}} \quad (\text{Gleichung 9.1})$$

Diesem Vorgehen liegt die Annahme zugrunde, dass die unbestimmte Lage des Umschaltpunktes innerhalb der Quantisierungsintervalle gleichverteilt ist. Darüber hinaus gehende Informationen sind normalerweise nicht bekannt. Reale A/D-Wandler in digitalen Anzeigeeinheiten werden wahrscheinlich eine günstigere Verteilungsdichte aufweisen (schon aus fertigungstechnischen Gründen). **Das heißt, die Annahme der Gleichverteilung ist sehr konservativ und die tatsächliche Messunsicherheit wird sicherlich nicht zu klein abgeschätzt.**

2. Wenn etwas Spielraum nach oben für die Messunsicherheit vorhanden ist, kann eine Approximation der Dreieckverteilung durch eine Normalverteilung (zum Beispiel mit einer

	Messunsicherheitsbeitrag bei der Quantisierung von Messwerten https://doi.org/10.7795/550.20201012	DKD-E 13-1	
		Ausgabe:	10/2020
		Revision:	0
		Seite:	16 / 19

Überdeckungswahrscheinlichkeit von 95,45 % entsprechend $2\sigma_N$) gerechtfertigt sein (s. Abbildung 3). Das bedeutet, die Standardunsicherheit ergibt sich mit der Standardabweichung zu

$$\sigma_N = \frac{2 \cdot \Delta U_{\text{Code}}}{2 \cdot 2} = \Delta U_{\text{Code}}/2$$

(Gleichung 10)

Der Erweiterungsfaktor ist dann $k_N = 2,0$; also ist die erweiterte Messunsicherheit $U_{\text{MU}}(\delta U_{\text{KombN}}) = \Delta U_{\text{Code}}$.

Dieser einfache Ansatz ist für die meisten Anwendungen in der Praxis gut geeignet. Er überschätzt die Messunsicherheit nicht zu sehr und passt sich mit dem Erweiterungsfaktor $k_N = 2$ für eine Normalverteilung einer kombinierten Messunsicherheit gut in eine übergeordnete Unsicherheitsanalyse für ein System mit weiteren Unsicherheitsbeiträgen ein.

3 Literatur

- [PAPOULIS] Probability, Random Variables, and Stochastic Processes
Athanasios PAPOULIS
McGraw Hill, Second International Student Edition (1984)
(Chapter 6: Two Random Variables)
- [GUM] Evaluation of measurement data –
Guide to the expression of uncertainty in measurement
GUM, ISO/IEC Guide 98-3: 2008
JCGM 100:2008, First edition September 2008
Section 4.3 Type B evaluation of standard uncertainty
Subsection 4.3.9 (Trapezoidal distribution, convolution)
- [VIM] Internationales Wörterbuch der Metrologie
(Deutsch-Englische Fassung)
ISO/IEC-Leitfaden 99:2007; 4. überarbeitete Auflage 2012

4 Anhang

4.1 Charakteristische Daten für verschiedene Verteilungsdichtefunktionen

Art der Verteilung	σ	P_{95}	k -Faktor	U_{MU}
Normalverteilung (95,45%)	$\sigma_N = 1/2 = 0,5$	$P_{N95} = 0,9545$	$k_{N95} = 2$	$U_{N95} = 1,000$
Gleichverteilung	$\sigma_R = 1/\sqrt{3} = 0,5774$	$P_{R95} = 0,950$	$k_{R95} = 1,653$	$U_R = 0,954$
Dreieckverteilung	$\sigma_D = 1/\sqrt{6} = 0,4082$	$P_{D95} = 0,776$	$K_{D95} = 1,902$	$U_D = 0,766$
U-Verteilung	$\sigma_U = 1/\sqrt{2} = 0,707$	$P_{U95} = 0,998$	$k_{U95} = 1,411$	$U_U = 1,000$
Parabelverteilung	$\sigma_P = 1/\sqrt{5} = 0,4472$	$P_{P95} = 0,811$	$k_{P95} = 1,814$	$U_P = 0,363$
Kubische Verteilung	$\sigma_K = \sqrt{2/15} = 0,365$	$P_{K95} = 0,691$	$k_{P95} = 1,892$	$W_K = 0,363$
Normalverteilung (99,00%)	0,388		2	0,766
Normalverteilung (99,45%)	0,333 (3 σ)		2	0,666
R \rightarrow N	0,577		2	1,154
D \rightarrow N	0,408		2	0,816

Tabelle 1: Charakteristische Daten für verschiedene Verteilungsdichtefunktionen (mit $a = 1$, der halben Breite der Verteilungsdichtefunktion)

4.2 Faltung

4.2.1 Mathematische Definition

$F_1(t)$ und $F_2(t)$ seien für $-\infty < t < +\infty$ integrierbare Funktionen. Das Integral:

$$F_1(t) * F_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(t - \tau) \cdot F_2(\tau) d\tau \quad \text{heißt Faltung von } F_1(t) \text{ und } F_2(t).$$

4.2.2 Faltung beim Würfelspiel (*Alea iacta est*)

Die Augenzahlen eines Würfels (1 bis 6) sind gleichverteilt. Die Summen der Augenzahlen der Würfel mit zwei Würfeln sind es nicht. Wenn mit zwei Würfeln geworfen wird, sind folgende $6 \cdot 6 = 36$ Kombinationen möglich:

(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6),
(2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6),
(3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6),
(4;1), (4;2), (4;3), (4;4), (4;5), (4;6),
(5;1), (5;2), (5;3), (5;4), (5;5), (5;6),
(6;1), (6;2), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6),

Werden die jeweiligen Summen gebildet und systematisch angeordnet, erhält man folgendes Bild:

Häufigkeit ²⁾		1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
							(6;1)					
						(5;1)	(5;2)	(6;2)				
					(4;1)	(4;2)	(4;3)	(5;3)	(6;3)			
				(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)		
			(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)	
		(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)
Summe		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Es gibt 11 verschiedene Summen-Werte ($\neq 0$), die allerdings mit unterschiedlicher Häufigkeit auftreten. Daraus lässt sich eine, wenn auch bei so wenigen Werten nur diskrete Verteilungsdichte³⁾ für die Summe der Augenzahlen bei einem Wurf mit zwei Würfeln erkennen. Es handelt sich um eine angenähert dreieckige Form. Sie hat ihr Maximum bei 7, dem Mittelwert aller möglichen Summen-Werte, und ist (nahezu) doppelt so breit (11) wie die bekanntermaßen diskrete Gleich-Verteilungsdichte ** der Augenzahl je eines der beteiligten Würfel (1; 2; 3; 4; 5; 6), also jeweils 6 unterschiedliche Werte.

Hier wird augenscheinlich, die Summe zweier gleichverteilter (diskreter) Zufallswerte ist wieder ein Zufallswert, allerdings mit einer dreieckförmigen (diskreten) Verteilungsdichte ** (nahezu) doppelter Breite.

Dieser Sachverhalt wird mathematisch mit dem Begriff „Faltung“ (engl. „Convolution“) für zwei Zufallszahlen bezeichnet. Die Berechnung einer Faltung ist im Allgemeinen recht kompliziert und ist in der Literatur zu stochastischen Prozessen [z. B. PAPOULIS] beschrieben.

²⁾ Die Häufigkeitswerte sind mit dem Teiler 36 dargestellt, was formal die Normierung andeuten soll, sodass deren Summe 1 ergibt.

³⁾ Mathematisch exakt wäre, sich die diskrete Verteilungsdichtefunktion mit einer Anzahl von Dirac-Impulsen, als „Nadeln“ unendlicher Höhe, aber definierten Flächen vorzustellen, denn die Dichte ist für Augenzahlen beim Würfeln naturgemäß nur für ganze Zahlen definiert.



Herausgeber:

Physikalisch-Technische Bundesanstalt

Deutscher Kalibrierdienst

Bundesallee 100

38116 Braunschweig

www.dkd.eu

www.ptb.de